九州大学大学院数理学府

平成 13 年度入学試験

数学共通科目問題 (数理科学コース)

注意

[**1**],[**2**], $\cdots$,[**5**] のすべてに解答しなさい。

[**1**]　次の不定積分および重積分を計算しなさい。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+4}\,dx$

(2) $\displaystyle\iiint_D z^2\,dxdydz$　　ただし、$D=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leqq 2z\}$

[**2**]　$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ に対して、

$$r=|\mathbf{x}|=\left(\sum_{i=1}^{n}\ x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad \Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

とおく。$r>0$ の関数 $f(r)$ が 2 回微分可能として、次の問に答えなさい。

(1)

$$\Delta f(r)=f''(r)+\frac{n-1}{r}f'(r)$$

を示しなさい。

(2) $f''(r)/f'(r)$ に注目して、

$$\Delta f(r) = 0$$

となる $f(r)$ を求めなさい。

[3] m 次 $(m = 1, 2, \cdots)$ 多項式

$$P_m(t) = t^m + a_1 t^{m-1} + a_2 t^{m-2} + \cdots + a_{m-1} t + a_m$$

が各 $n = 0, 1, 2, \cdots, m-1$ に対して

$$\int_0^1 P_m(t)\ t^n\ dt = 0$$

をみたすとする。

(1) 3 次多項式 $P_3(t)$ を求めなさい。

(2) 積分

$$\int_0^1 t(1-t)\left(\frac{d}{dt}P_m(t)\right)^2\ dt$$

はある m 次多項式と $P_m(t)$ の積の $[0, 1]$ 区間上の積分の形にかき直せることを示しなさい。

(3)

$$\frac{\int_0^1 t(1-t)\left(\frac{d}{dt}P_m(t)\right)^2\ dt}{\int_0^1 P_m(t)^2\ dt}$$

の値を求めなさい。

[4] $\mathbf{R}^3$ の点の座標を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ で表す。 $\mathbf{R}^3$ 内の平面

$$\Pi : \ x + 2y + 3z = 0$$

に関して、つぎの問に答えなさい。

(1) **平面** Π **に直交する長さが** 1 **のベクトルを求めなさい。**

(2) $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ **と平面** Π **に関して対称な点** $F(\mathbf{a})$ **を求めなさい。さらに、** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **を平面** Π **に関して対称な点に写す変換** F **の (標準基底に関する) 表現行列を求めなさい。**

(3) (2) **で求めた行列を対角化する直交行列を求めなさい。**

[5] $n \times n$ **正方行列** $A = [a_{ij}]$ **は** $a_{ij} \geqq 0$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ **および**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

をみたすとする。このとき、つぎのことを示しなさい。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ **は** A **の固有ベクトルである。**

(2) A **の任意の固有値** λ **は** $|\lambda| \leqq 1$ **をみたす。**

(3) A **のすべての成分が正** $(a_{ij} > 0)$ **であれば、**A **の** 1 **以外の固有値** λ **は** $|\lambda| < 1$ **をみたす。**