九州大学大学院数理学府
平成 14 年度修士課程入学試験
数学共通科目問題 (数理科学コース)

注意　問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答しなさい.

[1] 以下の (1) から (3) の真偽を判定しなさい．正しいときは証明を与え，正しくないときは反例を挙げ，それが反例になることを説明しなさい.

(1) 2 変数関数 $f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で各変数 x 及び y に関して偏微分可能ならば，$f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ において連続である.

(2) 任意の自然数 n 及び正数 $x>0$ に対して，次の不等式が成立する.

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

(3) A を 2 次正方行列とする．A の特性方程式が λ を重根として持つならば，固有値 λ に対応する A の 2 つの固有ベクトルで一次独立なものが存在する.

[2] 次の各問に答えなさい.

(1) 極座標表示された閉曲線 $r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ が囲む領域の面積と曲線の全長を求めなさい.

(2) 次の 3 重積分を計算しなさい.

$$V = \int\!\!\int\!\!\int_D xyz \; dxdydz$$

ただし,

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \;:\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1,\; x,y,z \geqq 0 \right\}$$

であり，$a,\, b,\, c > 0$ は定数とする.

[3] a を実数とし，次の各問に答えなさい.

(1) 4 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^4$ 内の 4 個の列ベクトルの組

$$\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$$

が一次従属となるような a の値をすべて求めなさい.

(2) 行列 $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 2 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ の階数を調べなさい.

(3) 一般に n 次実正方行列 B がある自然数 k に対して $B^k = O$ を満たすとき, 0 でない任意の実数 t に対して $B - tI_n$ の逆行列が存在することを示しなさい. ただし, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ は n 次単位行列とする.

(4) 問 (2) で定めた行列 $A(a)$ は, 任意の実数 a と任意の自然数 k に対して $A(a)^k \neq O$ となることを示しなさい.

[4] $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ を n 次実対称行列とする. 次の各問に答えなさい.

(1) n 次元実ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して, 関数

$$f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

を変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する 2 次形式と呼ぶ. ただし, ${}^t\boldsymbol{x}$ は列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置を表わす.

(i) 条件 ${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = 1$ のもとで 2 次形式 $f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ の最小値は, 行列 A の最小固有値に等しいことを示しなさい.

(ii) 条件 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ のもとで 2 次形式

$$g(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 4x_3x_1$$

の最小値を (i) を利用して求めなさい.

(2)　n 次実対称行列 A の階数が 1 であるとき，0 でない実数 c と n 次元実ベクトル $\boldsymbol{h}$ が存在して

$$A = c\,\boldsymbol{h}\,{}^t\boldsymbol{h}$$

と表示されることを示しなさい.

[5] 次の二つの数列を考える．以下の各問に答えなさい.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\ d\theta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ J_n &= \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\ dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

(1)　積分 I_n の値は

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}\times\frac{\pi}{2}, \\ I_{2n+1} &= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)} \end{aligned}$$

で与えられることを示しなさい．ただし，$n = 1, 2, 3, \ldots$ とする.

(2)　数列 $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ が単調減少であることを用いて，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$$

を示しなさい．また，このことを利用してウォリス (Wallis) の公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$$

を証明しなさい.

(3)　被積分関数を比較することによって，次の不等式を証明しなさい.

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leqq \int_0^{\infty} e^{-nx^2} dx \leqq \int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}\ dx$$

(4)　問 (1) と同様にして

$$J_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}\{(n-1)!\}^2}\times\frac{\pi}{2}$$

を直接計算で示すことができる．このこと及び以上の小問の結果を用いて

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を証明しなさい.