九州大学大学院数理学府
平成17年度修士課程入学試験
数学基礎科目問題 (数理科学コース)

注意
- 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答せよ.
- 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] $a,\ b$ を実数，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を実数列とする.

(1) 命題「数列 $\{a_n\}$ は a に収束する.」とその否定命題を ε-N 論法で述べよ.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$ を証明せよ.

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = +\infty$ を証明せよ.

[2] 単位行列を I とする．n 次の直交行列のうち，行列式の値が 1 となるもの全体の集合を $\mathrm{SO}(n)$ と書く：

$\mathrm{SO}(n) = \{A \,|\, A$ は実数を成分とする n 次の正方行列で ${}^tAA = A\,{}^tA = I, \det A = 1\,\}$.

(1) どんな行列 $T \in \mathrm{SO}(2)$ に対しても，ある実数 θ が存在して

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と表されることを示せ.

(2) 行列 $A \in \mathrm{SO}(3)$ で，その成分に 0 となるものが一つもないものを，具体的に一つあげよ.

(3) 行列 $A \in \mathrm{SO}(3)$ の固有値の絶対値は 1 であることを示せ．さらにその固有値の少なくとも一つは 1 であることを証明せよ.

(4) 行列 $A, B \in \mathrm{SO}(3)$ が，固有値 1 に対する固有ベクトルを共有しているならば $AB = BA$ を満たすことを証明せよ.

(5) 逆に行列 $A, B \in \mathrm{SO}(3)$ が，$AB = BA$ を満たすならば，固有値 1 に対する固有ベクトルを共有しているか？ 正しければ証明をし，誤りであるならば反例をあげよ.

[3]

(1) (i) 関数 $f(x) = x\sqrt{x^2+1} + \log(x + \sqrt{x^2+1})$ の導関数を計算せよ．

(ii) 任意の整数 $n \geq 2$ に対して不等式

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \sqrt{1 - x^n + x^{2n}}\, dx < \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})\right)$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) 次の重積分

$$\iiiint_V xw \; dxdydzdw$$

の値を求めよ．ただし

$$V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq z,\ 0 \leq w \leq 1\}$$

とする．

[4] 実数を成分とする n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ $(i,j = 1,\dots,n)$ が 次の条件を満たしているものとする．

（ア） 成分は非負，すなわち，$a_{ij} \geq 0$ $(i,j = 1,\dots,n)$.

（イ） 各列の成分の和は 1，すなわち，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ $(j = 1,\dots,n)$.

ベクトルの列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ $(k = 0,1,2,\dots)$ を次の漸化式で定義する：

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k, \quad k \geq 0, \quad \boldsymbol{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ が $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{j0} = 1$ を満たしているとき，任意の $k \geq 1$ に対して $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{jk} = 1$ であることを示せ．

(2) 転置行列を考えることにより，行列 A は 1 を固有値として持つことを示せ．

(3) 行列 A の固有値は全て絶対値が 1 以下であることを示せ．

(4) 行列 A の成分が全て正であるとき，A の固有値 1 に対する固有空間は 1 次

元であることを示せ.

(5) (4) の条件に加えて A が実対称行列のときに，ベクトルの列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ はあるベクトルに収束することを示せ.

[5] 次の楕円の周の長さを小数点以下第二位まで（切捨てで）求めよ.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (a=1.02,\ b=1).$$