

九州大学大学院数理学府  
平成18年度修士課程入学試験  
数学基礎科目問題 (数理科学コース)

- 注意
- 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答せよ.
  - 以下  $\mathbb{N}$  は自然数の全体,  $\mathbb{R}$  は実数の全体,  $\mathbb{C}$  は複素数の全体を表す.

[1] 次の (1) から (4) の命題の真偽を述べよ. また, 正しいものには証明を与え, 誤っているものには反例をあげ, それが反例になることを説明せよ.

(1) 任意のベクトル空間  $V$  の部分ベクトル空間  $X, Y, Z$  について,

$$(X + Y) \cap Z = (X \cap Z) + (Y \cap Z)$$

が成り立つ. ここで,  $V$  の勝手な部分集合  $A, B$  に対して,

$$A + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V \mid \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$$

である.

(2)  $f(x)$  は  $\mathbb{R}$  上の実数値連続関数で,  $x = a$  を除いて微分可能であるとする.

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = A$$

が存在するとき,  $f(x)$  は  $x = a$  で微分可能で  $f'(a) = A$  である.

(3)  $\mathbb{R}$  上の実数値関数  $f(x)$  が  $x = 0$  で微分可能で  $f'(0) > 0$  ならば, ある  $\varepsilon > 0$  が存在して,  $-\varepsilon < a < b < \varepsilon$  となる任意の  $a, b$  に対して  $f(a) < f(b)$  となる.

(4) 2 次の実正方行列  $A$  が  $A^2 = A$  をみたせば,  $A = O$  (零行列) か  $A = I$  (単位行列) となる.

[2] 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  について、以下の問いに答えよ。

- (1)  $A$  の固有値および固有ベクトルを求めよ。
- (2) 点列  $\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, A^3\mathbf{v}, \dots, A^n\mathbf{v}, \dots$  が収束するような  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  全体の集合を  $V$  とおく。  $V$  は  $\mathbb{R}^2$  の部分ベクトル空間となることを示せ。
- (3)  $V$  の基底を一つ具体的に与えよ。

[3]  $n$  は 2 以上の自然数、  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  は  $n$  次の実正方行列とする。

- (1)  $A$  の行列式  $\det A$  の定義を書け。
- (2) 実数  $x_i, y_j$  ( $x_i \neq y_j, i, j = 1, 2, \dots, n$ ) に対して、  $a_{ij}$  が

$$a_{ij} = \frac{1}{x_i - y_j}$$

と表されるとき、次式が成り立つことを示せ。

$$\det A = \frac{\prod_{j=2}^n (x_1 - x_j) \prod_{j=2}^n (y_j - y_1)}{\prod_{j=1}^n (x_1 - y_j) \prod_{i=2}^n (x_i - y_1)} \det B$$

ただし、  $B = (a_{ij})_{2 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq n}$  は、  $A$  から第 1 行と第 1 列を取り除いて得られる  $n - 1$  次の正方行列である。

- (3) (2) の  $A$  に対し、次式が成り立つことを示せ。

$$\det A = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)(y_j - y_i)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (x_i - y_j)}$$

[4]

- (1) 2 次元の極座標変換  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  についてヤコビ行列式  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$  を計算せよ。
- (2)  $\mathbb{R}^3$  の部分集合

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

の体積を求めよ。

[5]  $f(x), g(x)$  を 2 次の実係数多項式とする. ただし, 方程式  $g(x) = 0$  は実数解を持たないとする. 関数  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$F(x, y) = \frac{f(x)}{g(y)}$$

で定義するとき, 以下のそれぞれの場合に  $F(x, y)$  が極値を持つかどうかを判定せよ. さらに, 極値を持つ場合は, 極値を取る点の個数を求めよ.

- (1) 方程式  $f(x) = 0$  も実数解を持たないとき.
- (2) 方程式  $f(x) = 0$  が 2 つの相異なる実数解を持つとき.