九州大学大学院数理学府
平成20年度修士課程入学試験
数学基礎科目問題(数理科学コース)

注意 • 問題[1][2][3][4][5]のすべてに解答せよ.

• 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1]

(I) 空間内の領域 $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 1\}$ 上の次の 3 重積分 I を計算しなさい:

$$I = \iiint_D xy\ dxdydz.$$

(II) $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 2, 0)$, $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ とする.

(1) 3 つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$ で張られる平行六面体の体積 $V(\mathbf{x})$ を x, y, z を用いて表しなさい.

(2) $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3;\ |\mathbf{x}| = 1\}$ を単位球面とする. $\mathbf{x}$ が S 上を動くとき $V(\mathbf{x})$ の最大値, および最大値をあたえる点 $\mathbf{x}$ をすべて求めなさい.

[2]

次の行列 A, B について以下の問に答えなさい.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) A, B が直交行列で対角化できるかどうか判定しなさい. また, できるときには, 対角化する直交行列を求めなさい.

(2) A, B のうち直交行列で対角化不可能なものがあるときには, その行列が正則行列で対角化できるかどうか判定しなさい. また, できるときには対角化する正則行列を求めなさい.

[3]

(1) $a < b$ とし,

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & (a \leq x \leq b \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

とする. このとき, $f(x)$ は C^1-級関数であることを証明しなさい.

(2) 閉区間 $[c, d]$ 上の連続関数 $F(x)$ は次の性質を持つとする:

$$g(c) = g(d) = 0 \text{ をみたす任意の } C^1\text{-級関数 } g(x) \text{ に対して}$$
$$\int_c^d g(x)F(x)dx = 0.$$

このとき, $F(x)$ は (c, d) 上で恒等的に 0 であることを証明しなさい.

[4] A を n 次実対称行列とするとき, 次の問に答えなさい.

(1) A の固有値は実数であることを示しなさい.

(2) ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ をそれぞれ A の固有値 λ, μ に対応する固有ベクトルとする. $\lambda \neq \mu$ のとき, $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は直交することを示しなさい.

(3) A の固有値がすべて非負ならば, 任意のベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して内積 $(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$ は非負であることを示しなさい.

(4) $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ とし, $\|A\| = \sup_{|\mathbf{x}|=1} |A\mathbf{x}|$ とおく. このとき

$$\|A\| = \max\{|\lambda|;\ \lambda \text{ は } A \text{ の固有値}\}$$

が成り立つことを示しなさい.

[5]　円板 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ および十分滑らかな 2 変数関数 $f(x, y)$ をもちいて $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = f(x, y),\ (x, y) \in D\}$ と定義される曲面の面積 S は 2 重積分

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

であたえられることが知られている.

(1) $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と極座標表示したとき,

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \sqrt{r^2 + r^2\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2}$$

となることを示しなさい.

(2) $g(r, \theta) = r + \sqrt{2}\,\theta$ であるときの面積 S を求めなさい.