九州大学大学院数理学府
平成21年度修士課程入学試験
数学問題(MMAコース)

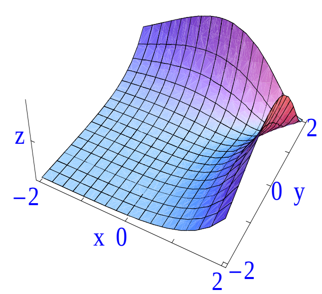
注意 問題[**1**][**2**][**3**][**4**][**5**][**6**][**7**]の中から3題を選んで解答しなさい.

[1] 以下の問に答えなさい.

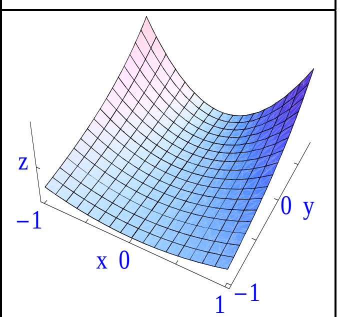
(1) 下のグラフ(A), (B), (C)に対応する関数を

(i) $z=(x+y)^2e^{x-y}$, (ii) $z=(x-y)^2e^{x+y}$, (iii) $z=x^2e^y$

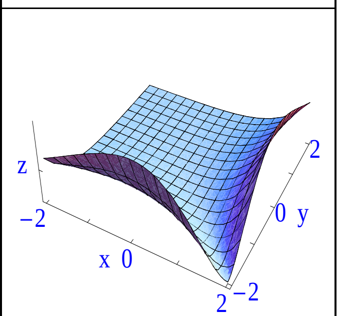
の中からそれぞれ選びなさい.



(A)



(B)



(C)

(※ グラフの軸は, 左奥から右手前が x の正の方向, 左手前から右奥が y の正の方向, 上向きが z の正の方向です.)

(2) 次の重積分の値を求めなさい.

$$\iint_{y\geq 0,\, x^2+y^2\leq 1} y\,dxdy$$

(3) 次の二変数関数のそれぞれについて，それが調和関数であるか否かを判定しなさい.

(i) $\log(x^2+y^2)\quad ((x,y)\neq(0,0))$,　　(ii) $e^{x^2-y^2}$

ただし，二変数関数 f が調和関数であるとは, 定義域の各点で

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

をみたすことです.

[2] 行列 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ について，以下の問に答えなさい.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) A を直交行列により対角化しなさい.

(3) $B=\frac{1}{2}A$ とします. 行列 B の n 乗の $(1,1)$-成分 $(B^n)_{11}$ の $n\to\infty$ での極限値を求めなさい.

[3] 以下の問に答えなさい.

(1) $y = y(x)$ に関する次の微分方程式の初期値問題を解きなさい.

$$y^2 + 1 - (x+1)y' = 0, \quad y(0) = \sqrt{3}$$

(2) $y = y(x)$ に関する次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$$

[4] 以下の問に答えなさい. ただし $i = \sqrt{-1}$ とします.

(1) 複素関数 $\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ の上半平面における極とそこでの留数を求めなさい. ただし上半平面とは虚部が正である複素数の全体です.

(2) (1) の結果を用いて積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$ の値を求めなさい.

[5] 以下の問に答えなさい.

(1) 区間 $[0, \infty)$ 上の関数 f を,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 7) \\ t - 7 & (t \geq 7) \end{cases}$$

で定義します. f のラプラス変換 $F(s)$ を計算しなさい.

(2) 次の関数 G のラプラス逆変換 $g(t)$ を求めなさい.

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s^3}$$

[6]　区間 $[-\pi, \pi]$ 上の関数 f を次で与えます.

$$f(x) = \pi - |x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

以下の問に答えなさい.

(1) 次の積分の値を求めなさい.

$$\alpha_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \; dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\beta_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \; dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(2) 区間 $[-\pi, \pi]$ における f のフーリエ級数展開を求めなさい.

(3) 次の等式が成り立つことを示しなさい.

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

[7]　確率変数 X が平均 $\lambda > 0$ のポアソン分布に従うとは，X の確率分布が次の離散型確率分布で与えられることです.

$$\Pr\{X = x\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

確率変数 X と Y は互いに独立で, それぞれ平均 λ のポアソン分布に従うとします. このとき, 以下の問に答えなさい.

(1) $X + Y$ が平均 2λ のポアソン分布に従うことを示しなさい.

(2) 自然数 z を固定したとき，次の条件付き分布を求めなさい.

$$\Pr\{X = x \mid X + Y = z\}, \quad x = 0, 1, \ldots, z$$

(3) $X + Y = z$ が与えられたときの X の条件付き分布の名称を答えなさい.