九州大学大学院数理学府
平成21年度修士課程入学試験
数学基礎科目問題(数理学コース数理科学型)

注意
- 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答せよ.
- 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体を表す.

[1] 次の 2 変数関数 $f(x, y)$ の領域 D 上での極値を求めよ.

$$f(x, y) = \sin x \, \sin y \, \sin(x + y),$$
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

[2] 次の行列 A に対して以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -5 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 P を一つ求めよ.

(3) 次の条件 (a), (b) をみたす 3 次正方行列 B を一つ求めよ.

(a) $A = B^2$,

(b) B のすべての固有値は負でない実数である.

[3]

(1) 等式：

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{N-1}x^{2N-2} + \frac{(-1)^N x^{2N}}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N})$$

を用いて，次を示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は収束しないことを示せ.

(3) α を任意の正の実数とする．このとき，次の不等式を同時にみたすような自然数 k_1, k_2 $(k_1 < k_2)$ が存在することを示せ.

$$\alpha \leq \sum_{n=1}^{k_1} \frac{1}{n} \leq \alpha + 1,$$

$$\alpha - \frac{1}{2} \leq \sum_{n=1}^{k_1} \frac{1}{n} - \sum_{n=k_1+1}^{k_2} \frac{1}{n} \leq \alpha.$$

(4) 任意の正の実数 α に対して，a_n を適当に選ぶことにより，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

は，実数 α に収束することを示せ．ただし各 a_n は 1 又は -1 とする.

[4] 自然数 n に対して，

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx$$

とする.

(1) 上の広義積分が存在することを証明せよ.

(2) I_{n+2} と I_n の関係を求めよ.

(3) I_{2n} を計算せよ．必要ならば等式 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を使ってもよい.

[5] x を変数とする次数 2 以下の実係数多項式全体のなす実ベクトル空間を V とする．V から V への写像 L を $L(f(x)) = xf''(x)+(2-x)f'(x)-f(x)$，$f(x) \in V$ によって定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) L は線形写像になることを示せ.

(2) V の基底 $1, x, x^2$ に関する L の行列表示を求めよ.

(3) L の固有値と対応する固有空間を求めよ.

(4) $f(x), g(x) \in V$ に対して，(f, g) を

$$(f, g) = \int_0^\infty f(x)g(x)xe^{-x}\,dx$$

と定義すると，$(\cdot,\cdot)$ は V の内積になることを示せ.

(5) 問 (4) で定めた内積に関して，L の固有空間は互いに直交することを示せ.