# 九州大学大学院数理学府
# 平成23年度修士課程入学試験
# 数学問題 (MMA コース)

**注意** 問題 [**1**][**2**][**3**][**4**][**5**][**6**][**7**] の中から3題を選んで解答せよ.

[**1**] 次の行列 $A, B$ が複素行列で対角化可能かどうかを判定し，対角化可能な場合は対角化せよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

[**2**] $a$ を正数，$D = \{(x,y) \mid (x-a)^2 + y^2 \le a^2,\ y \ge 0\}$ として，次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D \left( 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} \right) y \, dxdy$$

[**3**] 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ と実数 $t$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $e^{tA} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$ を求めよ.

(2) $a, b$ を実数として，次の連立微分方程式の解を求めよ.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

**[4]** 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ の値を求めたいと思う．この計算に関連して，以下の問いに答えよ．

(1) 変数変換 $x = \tan\theta$ を利用して求めよ．

(2) 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ に対して留数計算を行うことにより求めよ．

(3) 学生 A 君は次のように計算した．

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x-i} = \log(R-i) - \log(-R-i) = \log\left(\frac{R-i}{-R-i}\right) = \log\left(\frac{1-\frac{i}{R}}{-1-\frac{i}{R}}\right).$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x+i} = \log(R+i) - \log(-R+i) = \log\left(\frac{R+i}{-R+i}\right) = \log\left(\frac{1+\frac{i}{R}}{-1+\frac{i}{R}}\right).$$

$R \to +\infty$ とすると，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-i} = \log(-1), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x+i} = \log(-1).$$

故に

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right) dx = \frac{1}{2i}\{\log(-1) - \log(-1)\} = 0.$$

この計算はどこかが間違っている．誤りの原因を指摘せよ．

**[5]** 次の常微分方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = \delta(t-1), \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

ただし，$\delta$ はディラックのデルタ関数である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 解 $y(t)$ のラプラス変換 $Y(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} y(t)\, dt$ を求めよ．

(2) $a$ を正数，$H$ をヘビサイド関数

$$H(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

として，$H(t-1)e^{-a(t-1)}$ のラプラス変換を求めよ．

(3) 解 $y(t)$ を求めよ．

**[6]** 以下の問いに答えよ.

(1) $R$ を正数，$D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$ として，次の積分を求めよ.

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$

(2) 次の積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

(3) $e^{-\frac{x^2}{2}}$ のフーリエ変換

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi}\, dx$$

を求めよ.

**[7]** 以下の問いに答えよ.

(1) $\mu$ を実数，$\sigma$ を正数とし，$X$ を密度関数

$$p(x \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

を持つ分布に従う確率変数とする．このとき，$X$ の期待値と分散を求めよ.

(2) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \ge 2)$ を (1) の母集団分布からの無作為標本の実現値とする．このとき

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i \mid \mu, \sigma)$$

を最大にするパラメータ $\mu$ と $\sigma > 0$ を求めよ.