$x^n - 1$ の因数分解に見られる数と式の不思議な関係

1年生の単元に「数と式」というものがあります．これは，ただ「数」と「式」をここで教えましょう，という意味でそう書いています．ところが，数学を深く学んでゆくと「数」と「式」は深いつながりがあることがわかってきます．偶然に2つの言葉を並べたことが実際に縁のあることが見つかると不思議な気がします．ここではそれを学んでみましょう．最初に「数」について話しましょう．自然数は素数の積に分解できます．小さい自然数では次のようになっています．

$4 = 2 \times 2$	$12 = 2 \times 2 \times 3$
$6 = 2 \times 3$	$14 = 2 \times 7$
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$15 = 3 \times 5$
$9 = 3 \times 3$	$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$10 = 2 \times 5$	$18 = 2 \times 3 \times 3$

ここで抜けている数 $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ は**素数**です．自然数は素数の積に分解できる（**素因数分解**といいます）ということをどこで教わるのかはよく知らないのですが，素数というものがあることと，素数の積で2以上のすべての自然数を書くことができるというのが，**「算術の基本定理」**と呼ばれています．「素数」はこれ以上は分解できない数ですから，物質でいえば「原子」のようなものです．それとも「素数」があるから人は物質についても，これ以上分解できないものがあることが想像できたのかもしれません．

では，式についてもそれに似たようなことはあるのでしょうか? ということが考えられます．それは次のような箱を考えて，縦の関係や横の関係を見比べて，空いている箱には何が入っているのかを想像することです．

数	式
素因数分解	

式といえば, **因数分解の公式**として次のような式を高校 1 年生のときに教わります.

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

高校ではこれを次のような形で与えることがあります.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

この 2 つの式は 2 番目の式の方が一般的に見えますが, 最初の式から簡単に 2 番目の式が得られます. それは次の式たちを見ればわかります. 左辺は x に $\dfrac{a}{b}$ を代入して全体に b^2 をかけたものです.

$$b^2\left\{(\frac{a}{b})^2 - 1\right\} = b(\frac{a}{b}-1)b(\frac{a}{b}+1)$$

カッコの外にある b を内に入れるとこうなります. それは 2 番目の式になります.

$$\left\{b^2 \times (\frac{a}{b})^2 - b^2\right\} = (b\times\frac{a}{b}-b)(b\times\frac{a}{b}+b)$$

高校では 2 番目の式を利用していろんな式の因数分解を計算させられますが, 面白いことはそんなにありません. ここでは違う道に分け入りましょう. それは次の疑問を考えてみることです.

＜疑問＞

$x^4-1, x^5-1, x^6-1, \cdots$ と次数を上げていくと
因数分解の式はどうなるのだろうか?

次数が増えるのだから複雑さが増すばかりだろう, と思いこんではいませんか. そのような道に分け入ると, 以外な湧き水に出会うことがあります.

小さいところ x^4-1, x^5-1, x^6-1 の因数分解は実際にやってみましょう.

$$x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^6 - 1 = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

これから一般の場合の因数分解の法則が次のように想像できます.

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

さて, これでは同じ風景しかありません. そこで, 4 について 次のことを考えてみましょう.

＜考えるヒント＞

$4 = 2 \times 2$ と書けているという 4 の素因数分解は
式の因数分解に影響を与えているのではないでしょうか?

これを利用すると, $x^4 - 1$ の因数分解は次のようにできます.

$$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

これと上の式を見比べると実は,

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$$

となっていました. 最初の方法はどんな n にも使えますが, それだけでは分解が最後まで終っていなかったのです.

分解の途中では法則が正しい形をしていません.

次の式は $x^5 - 1$ ですが, これは 5 が素数なので, 上の式以上の分解はできません.

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

次の $x^6 - 1$ は, $6 = 3 \times 2$ なので因数分解は次のように進めることができます.

$$x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

ここでは次の式も使いました.

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

これもよく知られた公式ですが, それが導かれる手順も紹介しておきましょう.

$$x^3 + 1 = x^3 - (-1)^3 = (x - (-1))(x^2 + (-1)x + (-1)^2) = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

＜疑問＞

どうして $6 = 2 \times 3$ とはしなかったのですか?

では, これを使ってみましょう.

$$x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1 = (x^2 - 1)((x^2)^2 + x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^4 + x^2 + 1)$$

ここまでは簡単に因数分解できますが, 次の式は思いつくでしょうか?

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2$$

ここまでくれば, さらに因数分解をすることができて, 同じ結果が得られることがわかるでしょう. そこで, $x^n - 1$ の因数分解をするときは, n の素因数分解の数の順序にも注意しないといけないことがわかりました. これが $x^n - 1, n = 4, 5, 6$ の因数分解の計算方法です. 肩に乗る指数が素数でないときには, その数の素因数分解を利用すると $x^n - 1$ の因数分解がもっと細かくできるようです. この方法をま

ねて, x^n-1 の因数分解をさらに先まで計算してみましょう. 特に指数がたくさん約数をもっている場合, $x^8-1, x^{12}-1, x^{24}-1$ などの因数分解を計算してみましょう. 次のページに答えを書いておきましたが, 最初はそれを見ないで計算してください.

n	n の約数	x^n-1	x^n-1 の因数分解
1	1	$x-1$	$x-1$
2	1,2	x^2-1	$(x-1)(x+1)$
3	1,3	x^3-1	$(x-1)(x^2+x+1)$
4		x^4-1	$(x-1)(x+1)(x^2+1)$
5		x^5-1	$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$
6		x^6-1	$(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
7		x^7-1	
8		x^8-1	
9		x^9-1	
12		$x^{12}-1$	
16		$x^{16}-1$	
18		$x^{18}-1$	
24		$x^{24}-1$	

こちらが答えです.

n	n の約数	x^n-1	x^n-1 の因数分解
1	1	$x-1$	$x-1$
2	1,2	x^2-1	$(x-1)(x+1)$
3	1,3	x^3-1	$(x-1)(x^2+x+1)$
4	1,2,4	x^4-1	$(x-1)(x+1)(x^2+1)$
5	1,5	x^5-1	$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$
6	1,2,3,6	x^6-1	$(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
7	1,7	x^7-1	$(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$
8	1,2,4,8	x^8-1	$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$
9	1,3,9	x^9-1	$(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$
12	1,2,3, 4,6,12	$x^{12}-1$	$(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$ $(x^2+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$
16	1,2,4 8, 16	$x^{16}-1$	$(x-1)(x+1)(x^2+1)$ $(x^4+1)(x^8+1)$
18	1,2,3,6 9,18	$x^{18}-1$	$(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ $(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)$
24	1,2,3,4,6 8,12,24	$x^{24}-1$	$(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2+1)(x^2-x+1)$ $(x^4+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)$

1　実験数学を紹介しよう

　数学は実験のない科目であったのに, 不思議な言葉を聞かされると思うでしょう. **実験数学のプログラム**は次のように書くことができます.

(1) データを収集します.

(2) 規則性, 関係, パターンを探します.

(3) 推測を数学の言葉で表現するようにします.

(4) 更なるデータで推測を検証して, 予想を立てます.

(5) 予想を証明します.

これを眺めると (1) から (4) までの内容は数学に固有なものではありません, というよりも科学とよばれる行為に共通に通用するプログラムだとわかります. そして算数を教わっていたときには確かにこのプログラムに沿っていたと思います. 「三角形の内角の和は 180 度になる」ことも, いろんな三角形で測ってみたのではなかったでしょうか? それは **(1) データを収集する**ことをしていました. 「何かを発見する」というプロセスは, このようなプログラムに沿ってなされることが多いのです. それは, すでにわかっていることの使用法を学ぶよりも楽しいものではなかったでしょうか?

　このプログラムにしたがって数学を勉強すれば, 脳を働かせるときのよいくせをつけられると思います.

2　実験数学のプログラムを細かく説明しよう

　プログラムの各項目ごとに, 何をするのか説明しましょう.

　(1) データを収集します.

　実験数学の始まりは, 何かを計算することです. すでに誰かが計算した結果を偶然目にすることから, 実験数学が始まる場合もあるでしょうが, 普通は何か探す目的をもって, 計算をすることでデータができます.

　すぐあとで, 式の因数分解の表を眺めて, そこに何か規則性がないだろうかと考えてみることをして見ます. 実際に脳が働くときはデータを集めている途中で規則

性に気がつきます. プログラムのように2つを区別できないこともよくあります. 数学の先生が「計算をたくさんしなさい」というアドバイスをすることがあります. それは, ただ計算をしなさい, と言っているのではありません. 計算をしている間に, 「何か前に似たようなことがあったなー」「前にも似たような計算をしたぞ」と気がついてほしい, そういう瞬間に出会ってほしい, という意味があるのではと思います. それが「発見」という感動を生みます. 法則を発見するときに, どのような手順でそれがなされるかを体験することはとてもよい教育です. 人は他人がしていることを実際に真似ることで, 脳に他の作業では得られない記憶が残ります.

(2) 規則性, 関係, パターンを探します.

集まったデータを眺めて, そのなかに何か特徴がないか探します. 模様がないだろうか? これとあれの間に関係がないだろうか? 規則性がないだろうか? まえにどこかで見たような気がするような? こういう気持ちでデータを眺めて見ます. 普通は集めてきたデータにそういうことがあるかどうかはわかりません. しかし, これから話すデータには規則性があることがわかっています. それを見つけることを通じて, 脳が規則性を見つけるときの働き方の練習になると思います. 模様というのは見つけてしまうと, 今までは、どうしてそれが見えなかったのだろう, と思うことが多いのです.

(3) 推測を数学の言葉で表現するようにします.

模様や規則性が見つかったといっても, それを数学の言葉を使って書くまでには, また苦労があります. 何かを思いついてもそれが言葉にならないという経験はありませんか? 数学の言葉で書くことは, 自分の考えを自分以外の人に理解してもらうために必要であり, 数学という言葉はより多くの人に自分の見つけたことをわかってもらえるためにとても有効な言葉なのです.

(4) 更なるデータで推測を検証し, 予想を立てます.

これではまだ推測が正しくできたとは言えません. その先にある新しいデータを探して, それに今得た数式で表現した推測が, このデータでもあっているかどうか, 確かめることをしなければいけません. いったん立てた推測が新しいデータでは成り立たないこともよくあります. そうすると, もう一度やり直さなければなりません. この操作を経て, これが正しいという推測にたどりつくまで繰り返します. そうなって初めて「予想」と名づけることができます.

(5) 予想を証明します.

そして最後にこの予想が成り立つ理由や仕組みを考えることです. **フェルマーの予想**を聞いたことはありませんか? ワイルスによって証明されるまでに約350年もの間がありました. 数学には証明されていない予想が数多くあります. 「ペトロフ叔父さんとゴールドバッハ予想」という小説があります. 予想を考えている数学

者の心理状態がよく描かれています．証明することは数学にとって生命の源です．しかし最初は，なぜ，このような現象が生じているのだろうと，不思議だなと思うだけでもよい，と私は思います．

3　実験数学のプログラムを体験しよう

最初に因数分解をたくさんしました．これが (1) **データの収集**にあたります．

式の因数分解の表を眺めて，そこに何か規則性がないだろうかと考えてみることが (2) **規則性，関係，パターンを探す**ことになります．始めてですから，**パターンを見つけるヒント**を上げましょう．慣れてくれば自分で出来るようになりますが，最初は誰でも難しいのが当然です．

＜考えるヒント＞

因数分解の表に同じものが現れていないか探してみよう．

同じものがない，すべてが異なっているとそこには規則性はありません．色がつくと，人の認識はより鮮明になりますので，

＜考えるヒント＞

因数分解の表の同じものに色をつけてみよう．

$x-1$ が最初に目に入ります．それはどんな n にも現れているようです．そこで次の予測が立てられます．

＜予想＞

$x-1$ は n がどれでもいつも現れています．

この予想は実は簡単に証明できます．次の式を始めに出しておきました．これが役にたつことがわかりますか?

$$\boxed{x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}$$

残った式で，次に簡単な式は $x+1$ です．今度は，すべての n で現れてはいないこと，がわかります．そのときは次のように考えます．

＜考えるヒント＞

$x+1$ が現れるときの n に何か特徴があるだろうか?

すると, n が $2, 4, 6, 8$ といったところで現れているのがわかります. これで**パターンが見つかりました.** 推測ができましたね. では, 次にある**推測を数学の言葉で表現する**とはどうすればよいのでしょうか?

$2, 4, 6, 8$ らを表す数学の言葉は何でしょうか? 2 の倍数または偶数という言葉もあります. さらに次のような表現まで思いつければこの段階はクリアできました.

$n = 2, 4, 6, 8$, たちは偶数で, それは $2m$ の形をしています.

$n = 2m$ という数学的な表現ができれば, 証明は次のようにできます.

$$x^n - 1 = x^{2m} - 1 = (x^2)^m - 1$$
$$= (x^2 - 1)((x^2)^{m-1} + (x^2)^{m-2} + \cdots + x^2 + 1)$$

これがプログラムを実行している脳の働きを言葉にしてみたものです. もう真似ることができると思えばしめたものです. 次のステップは老婆心ながら書いておきましょう.

＜考えるヒント＞

$x^2 + x + 1$ が現れるときの n に何か特徴がありますか?

＜観察＞

$x^2 + x + 1$ が現れている n は 3,6,9,12,18,24 です.

これから次のことを予測したいのですが,

＜予測＞

$x^2 + x + 1$ が現れている n は 3 の倍数です.

$n = 15$ の例がありません. そういうときは (4) **更なるデータで推測を検証する**ことになります. $n = 15$ の例を計算してみましょう.

$$x^{15} - 1 = (x^3)^5 - 1 = (x^3 - 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1) =$$
$$= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1))$$

これで $n = 15$ でも予測が正しいことが確かめられたので予想とできます. 証明のヒントもこの計算から見つけられるでしょう. 個々の式から n を眺めて規則性を探しました. 今度は全体を眺めて見ましょう.

＜考えるヒント＞

n の約数の個数は式の因数分解と何か関係はないだろうか?

$n=6$ の約数は $1,2,3,6$ です. 一方 x^6-1 の因数分解に
現れる式は　$x-1, x+1, x^2+x+1, x^2-x+1$ です.

＜問題＞

n の約数の個数と式の因数分解の間の関係を見つけよう.

4　円分多項式の登場

n が 2 の倍数のときに、$x+1$ が x^n-1 の因数分解に現れることは証明しました. これから次のことがわかります.

n の約数に 2 があると, $x+1$ が x^n-1 の因数分解に現れます.

したがって, 2 と $x+1$ が結びついていると思うことができます. そこで 2 から定まる多項式という意味で次の記号を新しく作ることにします.

$$\boxed{F_2(x)=x+1}$$

このように考えていくと, 得られた表の中では 2 以外の自然数 d に対しても, ある多項式 $F_d(x)$ が定まっていることがわかります. それを次の表にしてみました.

d	$F_d(x)$
1	x-1
2	x+1
3	x^2+x+1
4	x^2+1
5	$x^4+x^3+x^2+x+1$
6	x^2-x+1
7	$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$
8	x^4+1
9	x^6+x^3+1
12	x^4-x^2+1
15	$x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$
16	x^8+1
18	x^6-x^3+1
24	x^8-x^4+1

　この新しい記号を用いると x^n-1 の因数分解が, n の約数を使って次のように書かれていることがわかります.

$$\boxed{\begin{aligned} x-1 &= F_1(x) \\ x^2-1 &= F_1(x)F_2(x) \\ x^3-1 &= F_1(x)F_3(x) \\ x^4-1 &= F_1(x)F_2(x)F_4(x) \\ x^5-1 &= F_1(x)F_5(x) \\ x^6-1 &= F_1(x)F_2(x)F_3(x)F_6(x) \end{aligned}}$$

これが, n の約数の個数と x^n-1 の因数分解に現れる式の個数が等しい, ことの説明になっていることに気がつくでしょう.
規則性がわかると, $x^{36}-1$ の計算が見通しよくなります. 実際に, $x^{36}-1$ の因数分解をやってみましょう. 推測から得られる因数分解は次のようになります.

$$\boxed{x^{36}-1 = F_1(x)F_2(x)F_3(x)F_4(x)F_6(x)F_9(x)F_{12}(x)F_{18}(x)F_{36}(x)}$$

最初は $36 = 18 \times 2$ を使います.

$$\boxed{x^{36}-1 = (x^{18})^2-1 = (x^{18}-1)(x^{18}+1)}$$

これの第 1 項は推測から次のようになります.

$$\boxed{x^{18}-1 = F_1(x)F_2(x)F_3(x)F_6(x)F_9(x)F_{18}(x)}$$

第 2 項の因数分解をしましょう.

$$\boxed{x^{18}+1 = (x^6)^3+1 = (x^6+1)(x^{12}-x^6+1)}$$

x^6+1 はすでに計算しているものたちで次のように書けています.

$$\boxed{x^6+1=(x^2)^3+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)=F_4(x)F_{12}(x)}$$

これらをまとめます.

$$\boxed{x^{36}-1=F_1(x)F_2(x)F_3(x)F_4(x)F_6(x)F_9(x)F_{12}(x)F_{18}(x)(x^{12}-x^6+1)}$$

この式を推測の式と見比べれば次のように 36 に対応している式を $F_{36}(x)=x^{12}-x^6+1$ と定めれば, 因数分解の推測が $n=36$ でも正しいことがわかります.

x^n-1 のことは円の**等分方程式**と呼ばれています. そのことは $x^n-1=0$ の複素数の解の全体は複素平面で原点を中心にした半径 1 の円周上を n 等分にした点となることから名づけられました. それにならって $F_n(x)$ は**円分多項式**と呼ばれます. これは既約な多項式で, 多項式の世界では特別に深い理論を生みだす宝石です. 将来数学の世界に進まれて, 岩澤健吉先生のつくられた**「岩澤理論」**にいつか出会ってもらいたいと希望しています.