# 九州大学大学院数理学府
# 2021年度修士課程入学試験
# 数学問題（ＭＭＡコース）

注意 • 問題 [1][2][3][4][5][6] の中から 3 題を選択して解答せよ．
• 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 3 題分提出すること．

**[1]**　非負の整数 $n$ に対して

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) 非負の整数 $n$ に対して，以下の式が成り立つことを示せ．

$$e^x = f_n(x) + \int_0^x \frac{(x-s)^n}{n!} e^s \, ds$$

(2) $x > a$ のとき，以下の不等式が成り立つことを示せ．

$$\left| \int_a^x \frac{(x-s)^n}{n!} e^s \, ds \right| \leq \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} e^x$$

(3) $f_n(x)$ を利用して，相対誤差が $10^{-2}$ 以下となる $e$ の近似値を求めよ．

**[2]**　大きさ $4 \times 4$ の行列 $A$ を

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

とする．また，4 個の縦ベクトル $x_1, x_2, x_3, x_4$ は行列 $A$ の固有ベクトルであり

- $x_k$ の第 1 成分は $\dfrac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ $(k = 1, 2, 3)$
- $x_4$ の第 1 成分の符号は正
- $x_k$ の第 $k+2$ 成分から第 4 成分まではすべて 0 $(k = 1, 2)$
- $x_1, x_2, x_3, x_4$ が $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底

を満たすとする．ただし，縦ベクトル $y$ と $z$ の内積は $y^\top z$ で定義されているものとする ($y^\top$ は $y$ の転置)．以下の問に答えよ．

(1) $A$ の固有値は，0 もしくは 1 であることを示せ．

(2) 固有ベクトル $x_1, x_2, x_3, x_4$ を求めよ．

**[3]** $c \neq 0$ は定数とし，偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = c^2 \frac{\partial u}{\partial x}\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{A}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(t)$ に対して，$u(x,y) = f(x - cy)$ が (A) を満たすとき，$f(t)$ が満たす常微分方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた $f(t)$ の常微分方程式の一般解を求めよ．

**[4]** 2 次元確率変数 $(X, Y)$ は，平均 $(\mu_X, \mu_Y) = (3.4, 2.2)$，共分散行列

$$C = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.2 \\ -0.2 & 2.0 \end{pmatrix}$$

の 2 次元正規分布に従うとする．以下の問に答えよ．

(1) $X$ と $Y$ の相関係数を求めよ．

(2) $2X - 3Y$ の期待値と分散を求めよ．

(3) 2 次元確率変数 $(X - 2Y, X + Y)$ の共分散行列を求めよ．

(4) $Y = 2.0$ の下での $X$ の条件付き確率分布の平均と分散を求めよ．

**[5]**　複素関数 $f(z)$ を $f(z) = \dfrac{1}{z^3+1}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $f(z)$ の複素平面上の $z = e^{\pi \mathrm{i}/3}$ における留数を求めよ．ここで，$\mathrm{i}$ は虚数単位である．

(2) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ を求めよ．

**[6]**　関数 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のフーリエ変換 $H$ は

$$H(z) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-\mathrm{i}zx} dx \quad (z \in \mathbb{R})$$

で定義される．ここで，$\mathrm{i}$ は虚数単位である．
正の実数 $a$ と $0$ でない実数 $b$ に対して，関数 $f$ と $g$ が

$$f(x) = bxe^{-ax^2}, \quad g(x) = xf(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

により定義されているとする．以下の問に答えよ．ただし，正の実数 $\alpha$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

となることを用いてよい．

(1) $f$ のフーリエ変換 $F$ を求めよ．

(2) $g$ のフーリエ変換 $G$ を求めよ．

(3) 上の (2) で求めた $G$ が $G(0) = 1$ を満たすとき，$b$ の値を求めよ．