九州大学大学院数理学府

2021 年度修士課程入学試験
基礎科目問題

注意 • 問題 [1][2][3][4] のすべてに解答せよ.

• 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] 以下の問に答えよ.

(1) 実数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対し, 行列 A を $A = \begin{pmatrix} x & 0 & a & 0 \\ 0 & x & b & 0 \\ a & b & c & d \\ 0 & 0 & d & x \end{pmatrix}$ とおく. A の固有値が全て 0 以上となる $x \in \mathbb{R}$ の範囲を求めよ.

(2) n 次実対称行列 $B = (b_{i,j})_{i,j=1,2,..,n}$ に対し, B の固有値が全て 0 以上 かつ $b_{1,1} = 0$ ならば $b_{1,i} = b_{i,1} = 0\ (i = 2, 3, ..., n)$ となることを示せ.

[2]　V を 2 次の実正方行列全体がなすベクトル空間とし，W を 2 次の実対称行列全体がなす V の部分集合とする．また

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．ただし $a \in \mathbb{R}$ は実パラメーターである．

(1) W が V の部分ベクトル空間であることを示せ．また以下で与えられる $\{E_1, E_2, E_3\}$ は W の基底になることを示せ．

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 写像 F を

$$F(X) = {}^t\!AXA - X$$

と定めると，これは W からそれ自身への線形写像であることを示せ．
ただし，${}^t\!A$ は A の転置行列である．

(3) 上の (1) で与えられた W の基底 $\{E_1, E_2, E_3\}$ に関する F の表現行列を求めよ．

(4) $F\colon W \to W$ が全射となる a の値を求めよ．

[3] f, g, h は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数であるとする.

(1) 有限の極限値 $\lim_{x \to \infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ が存在するとき f は一様連続であることを示せ.

(2) g は有界とする. このとき $G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} g(y) dy$ は連続であることを示せ.

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx < \infty$ とする. このとき $H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} h(y) dy$ は一様連続であることを示せ.

[4] $\mathbb{R}^2$ 上の実数値関数 $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) 3 点 $(0,1)$, $(0,5)$, $(4,1)$ を頂点にもつ 3 角形の境界および内部を D とおく．D における f の最小値，最大値を求めよ．