九州大学大学院数理学府
2020 年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意

- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10][11] の中から 2 題を選択して解答せよ．
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること．
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] G を n 次実正則行列の全体のなす群とする (ただし, $n \in \mathbb{N}$). T を正則な対角行列全体のなす G の部分群とする. G の部分集合 $N_G(T)$ を次のように定義する.

$$N_G(T) = \{g \in G \mid g^{-1}Tg = T\}.$$

以下の問に答えよ.

(1) $N_G(T)$ は G の部分群であることを示せ.

(2) T は $N_G(T)$ の正規部分群であることを示せ.

(3) $n = 2$ のとき, 商群 $N_G(T)/T$ を決定せよ.

[2] $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位, f を正の整数とし,

$$\mathcal{O}_f = \{m + nfi \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $\mathcal{O}_f$ はガウスの整数環 $\mathbb{Z}[i] = \{m + ni \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ の部分環であることを示せ.

(2) 環の同型 $\mathcal{O}_f \simeq \mathbb{Z}[x]/(x^2 + f^2)$ を示せ. ただし, $\mathbb{Z}[x]$ は x を不定元とする整数係数の多項式環とする.

(3) $f > 1$ とし, p を f の素因数とする. このとき p を含む $\mathcal{O}_f$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ がただ一つ存在することを示せ.

(4) (3) の極大イデアル $\mathfrak{m}$ は単項イデアルでないことを示せ.

[3]　p を素数, F を標数 p の体, $\bar{F}$ を F の代数的閉包とし, $F[x]$ を F の元を係数とし, x を不定元とする多項式環とする. $f(x) = x^p - x - 1 \in F[x]$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $\alpha \in \bar{F}$ が $f(x)$ の根ならば, $\alpha+1, \alpha+2, \ldots, \alpha+p-1$ も $f(x)$ の根であることを示せ.

(2) $f(x)$ が $F[x]$ で可約ならば, $f(x)$ の根はすべて F の元であることを示せ.

(3) $x^p - x - 1$ を整数係数の多項式環 $\mathbb{Z}[x]$ の元とみるとき, $\mathbb{Z}[x]$ において既約であることを示せ.

[4]　閉区間 $[a,b]$ を含むある開区間上で定義された滑らかな関数 $f(r)>0$, $g(r)$ が

$$f'(r)^2+g'(r)^2=1$$

を満たすとする．xz 平面の曲線 $(f(r),0,g(r))$ の z 軸についての回転面 R は

$$\mathbf{x}=(f(r)\cos\theta, f(r)\sin\theta, g(r)) \qquad r\in[a,b], \quad \theta\in[0,2\pi]$$

と表される．以下の問に答えよ．

(1) 回転面 R の座標 (r,θ) についての第 1 基本形式, 第 2 基本形式を求めよ．

(2) 回転面 R のガウス曲率 K を f と f の高階微分を用いて表せ.

(3) 次の積分の値を求めよ．

$$\iint_R K dA$$

ただし, dA は回転面 R の面積要素とする.

[5] $\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とし, S^{n-1} を次で定める (ただし, $n \in \mathbb{N}$).

$$S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

写像 $F_n : S^{n-1} \to M(n, n; \mathbb{R})$ を

$$F_n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{x} \in M(n, n; \mathbb{R}), \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M(n, 1; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$$

により定め, N_n を F_n の像とする. ただし，$m \times n$ 実行列の全体を $M(m, n; \mathbb{R})$ で表し，自然にユークリッド空間 $\mathbb{R}^{mn}$ と同一視する．また, 行列 $A \in M(m, n; \mathbb{R})$ に対して，${}^tA \in M(n, m; \mathbb{R})$ は A の転置行列を表す．以下の問に答えよ.

(1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^{n-1}$ について，$F_n(\boldsymbol{x}) = F_n(\boldsymbol{y})$ であるための必要十分条件は $\boldsymbol{y} = \pm\boldsymbol{x}$ であることを示せ.

(2) S^{n-1} 上の同値関係 $\sim$ を次で定めるとき，商空間 $S^{n-1}/\sim$ が N_n と同相であることを示せ.

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{y} = \pm\boldsymbol{x}$$

(3) $N_n = \{P \in M(n, n; \mathbb{R}) \mid {}^tP = P,\ P^2 = P,\ \operatorname{rank} P = 1\}$ であることを示せ. ただし, $\operatorname{rank} P$ は行列 P の階数を表す.

[6]　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ には標準的な可微分多様体の構造が入っているとする．$\mathbb{R}^2$ の部分多様体 S^1 を次で定める：

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

以下の問に答えよ.

(1) $\mathbb{R}^3$ の部分多様体で直積多様体 $S^1 \times S^1$ と微分同相になるものが存在することを示せ.

(2) $\mathbb{R}^4$ の部分多様体で直積多様体 $S^1 \times S^1 \times S^1$ と微分同相になるものが存在することを示せ.

[7]　μ を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とする. $\mathbb{R}$ 上の関数 $P(x), Q(x)$ を

$$P(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},\ \ Q(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

と定める. また, 正の実数 t に対して

$$P_t(x) = \frac{1}{t} P\left(\frac{x}{t}\right),\ \ Q_t(x) = \frac{1}{t} Q\left(\frac{x}{t}\right)$$

とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} P_t(x) d\mu(x)$ の値を求めよ.

(2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可測関数で, 有界かつ $x=0$ で連続であるとする. このとき,

$$\lim_{t \to 0+} \int_{\mathbb{R}} P_t(x) f(x) d\mu(x) = f(0)$$

が成り立つことを示せ.

(3) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可測関数で, ある正の実数 M が存在して,

$$|f(x)| \leq \frac{M}{1+|x|} \quad (x \in \mathbb{R})$$

を満たし, かつ $x=0$ で連続であるとする. このとき,

$$\lim_{t \to 0+} \left\{ \int_{\mathbb{R}} Q_t(x) f(x) d\mu(x) - \int_{|x|>t} \frac{f(x)}{x} d\mu(x) \right\} = 0$$

が成り立つことを示せ.

[8] $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を複素平面内の原点を中心とする単位開円板とし, $\overline{\Delta} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ を Δ の閉包とする. $f(z)$ は $\overline{\Delta}$ 上の連続関数で, Δ で正則な複素関数であるとする. 以下の問に答えよ.

(1) $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とするとき, 次の等式を示せ.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2 \quad (z \in \Delta).$$

(2) $\overline{\Delta}$ の境界上で $|f(z)| = 1$ となるとき, $f(z)$ は Δ で零点をもつか $f(z)$ は定数関数であるかのいずれかであることを示せ.

[9] $p(x), q(x)$ は $\mathbb{R}$ 上有界かつ連続な関数とし, 微分方程式

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \quad \cdots (\sharp)$$

を考える. $\mathbb{R}$ 上 C^1 級の関数 y_1, y_2 に対し,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

とおく. 以下の問に答えよ

(1) y_1, y_2 が任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $W(x) \neq 0$ を満たすならば, y_1, y_2 は $\mathbb{R}$ 上 1 次独立であることを示せ. ここで y_1, y_2 が $\mathbb{R}$ 上 1 次独立であるとは, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ ならば $c_1 = c_2 = 0$ となることをいう.

(2) y_1, y_2 が $(\sharp)$ の解であるとき, W は微分方程式

$$W'(x) = -p(x)W(x)$$

を満たすことを示せ.

(3) y_1 は初期条件 $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ を満たす $(\sharp)$ の解, y_2 は初期条件 $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$ を満たす $(\sharp)$ の解とする. このとき, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, $W(x) \neq 0$ で, y_1, y_2 は $\mathbb{R}$ 上 1 次独立であることを示せ.

[10] $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を区間 $[0, \theta]$ 上の一様分布からの無作為標本とする. θ の最尤推定量を $\hat{\theta}$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\hat{\theta}$ を求めよ.

(2) θ の信頼区間 $[c_1\hat{\theta}, c_2\hat{\theta}]$ を考える. ただし, c_1, c_2 は $c_1 < c_2$ を満たす実数とする. 信頼係数を $1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ としたとき, 信頼区間の長さを最小にする c_1, c_2 を求めよ.

[11] C 言語で書かれた次の関数 gcd は, 与えられた自然数 m, n の最大公約数を求める関数である. C 言語では, `m % n` は m の n による剰余を返す演算である. この剰余演算 `%` の呼出回数について考察する.

```
int gcd(int m, int n)
{
  int r = m % n;
  if (r == 0) return(n);
  else return(gcd(n, r));
}
```

以下の問に答えよ.

(1) `gcd(25,13)` の計算中に剰余演算 `%` は何回呼ばれるか.

(2) 自然数 m, n に対して, 関数 `gcd(m,n)` の計算中に呼ばれる剰余演算 `%` は高々 $\lfloor 2\log_2 \max(m,n) \rfloor + 1$ 回であることを示せ. ただし, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す.

(3) 互いに素な自然数 m, n に対して, $tm = 1 \mod n$ となる n 以下の自然数 t を求める関数で計算量が $\mathcal{O}(\log_2 \max(m,n))$ であるものを作成せよ. ただし, アルゴリズムが説明できれば, 使用するプログラム言語は問わない.