九州大学大学院数理学府
2021年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意

- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10][11] の中から 2 題を選択して解答せよ.
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること.
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] 群 G について，次の三つの条件が同値であることを証明せよ．

(1) G は可換群である．

(2) 写像 $(x, y) \mapsto xy$ が，直積群 $G \times G$ から G への準同型となる．

(3) 直積群 $G \times G$ の対角部分集合 $\Delta := \{(x, x) \mid x \in G\}$ が $G \times G$ の正規部分群になる．

[2]　実 2 次正方行列全体のなす集合の部分集合 R を

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

で定める．以下の問に答えよ．

(1)　R は行列の和と積に関して，単位元を持つ可換環となることを示せ．

(2)　写像 $\varphi(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)) = a + b$ は R から $\mathbb{Z}$ への環準同型であることを示せ．

(3)　$\mathrm{Ker}\,\varphi$ は R の素イデアルであることを示せ．

(4)　R の部分集合

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in R \,\middle|\, a + b \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

は R の極大イデアルであることを示せ．

[3] 二つの実数 α, β を $\alpha = \cos(\frac{2\pi}{5}), \beta = \sin(\frac{2\pi}{5})$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 体の拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2$ であることを示せ．

(2) 体の拡大次数 $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 4$ であることを示せ．

(3) β の $\mathbb{Q}$ 上の共役元をすべて求めよ．

(4) $\mathbb{Q}(\beta)$ の $\mathbb{Q}$-自己同型群は巡回群であることを示せ．

[4] ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面

$$p(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = (t\cos s, t\sin s, s)$$

について，以下の問に答えよ．

(1) この曲面の第 I 基本形式，第 II 基本形式，主曲率，平均曲率，ガウス曲率を求めよ．

(2) この曲面上の点 p において第 I 基本形式により定まるノルムが 1 の接ベクトル v を持つ曲面上の曲線を考える．点 p におけるこのような曲線の法曲率は曲線の選び方によらず，v のみで定まることを示せ．

(3) 上の (2) で定まる点 p での法曲率を $k(v)$ と書く．第 I 基本形式に関して直交するノルムが 1 の接ベクトルの組 v_1, v_2 で $k(v_1) = k(v_2) = 0$ を満たすものが存在することを示せ．

[5]　ユークリッド空間内の $n+1$ 個の頂点からなる単体を n-単体と呼ぶ．特に空集合は (-1)-単体である．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ 内の単体 τ に対して，その辺単体全体を $K(\tau)$ で表す．ただし，単体 ρ が単体 τ の辺単体とは，ρ の頂点がすべて τ の頂点であることである．自然数 $k \geq 2$ に対して，$\mathbb{R}^2$ 内に正 $3k$ 角形 X を描き，その頂点を一つ取って $\boldsymbol{v}_0$ とし，$\boldsymbol{v}_0$ から反時計回りに X の $3k$ 個の頂点を順に $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{3k-1}$ と名付ける．さらに，二つの集合 M, L を次で定める．

$$M = \bigcup_{i=0}^{3k-1} K(\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_{i+1} \rangle), \qquad L = \bigcup_{i=0}^{2} K(\langle \boldsymbol{v}_{ki}, \boldsymbol{v}_{ki+k} \rangle).$$

ただし，$\boldsymbol{v}_{3k} = \boldsymbol{v}_0$ とし，$\mathbb{R}^2$ 内の異なる二点 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対して $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ は $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を端点とする 1-単体を表す．単体複体 M の q 次元整係数ホモロジー群を $H_q(M)$ で表すとき，以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^2$ 内の任意の単体 $\tau \neq \emptyset$ に対して，$K(\tau)$ が単体複体であることを示せ．

(2) M と L が単体複体であることを示せ．

(3) $H_1(M) \cong \mathbb{Z}$ と $H_1(L) \cong \mathbb{Z}$ を示せ．

(4) 次で与えた頂点間の対応で定まる単体写像 $f : M \to L$ が誘導する準同型写像 $f_* : H_1(M) \to H_1(L)$ を，上の (3) の同型を通して定まる $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への準同型写像として記述せよ．

$$f(\boldsymbol{v}_{3\ell+i}) := \boldsymbol{v}_{ki}, \qquad 0 \leq i < 3,\ 0 \leq \ell < k.$$

[6]　円周 S^1 を閉区間 $[0,1]$ において 0 と 1 を同一視して得られる商空間とし，その点を閉区間内の実数で表す．ただし，0 と 1 は同じ点を表す．2 次元トーラス $S^1 \times S^1$ からユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ 内の 3 次元球面

$$S^3 = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2+z^2+w^2=2\right\}$$

への写像 $\varphi : S^1 \times S^1 \to S^3$ を

$$\varphi(s, t) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

で定義する．以下の問に答えよ．

(1) 上で定義した S^1 が C^∞ 級微分可能多様体であることを示せ．

(2) φ は C^∞ 級の埋め込み写像であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}^4$ の座標関数 w の定義域を S^3 に制限した関数の S^3 における臨界点をすべて求めよ．

(4) $\mathbb{R}^4$ の座標関数 x, w の和 $x+w$ の定義域を $M = \varphi(S^1 \times S^1)$ に制限した関数の M における臨界点をすべて求めよ．

[7]　以下の問に答えよ．

(1) $p > 0$ を定数とする．次の広義積分の収束・発散を判定せよ．

$$\int_2^\infty \frac{dt}{t(\log t)^p}$$

(2) $(X, \mathcal{B}, m)$ を全測度が有限な測度空間とし，f は X 上の $\mathcal{B}$ 可測関数で，m に関してほとんどいたる所 $f(x) \geq 2$ を満たすとする．また $g\colon [2, \infty) \to [0, \infty)$ を非負値ルベーグ可測関数とする．このとき，次の等式を示せ．

$$\int_X \Big(\int_2^{f(x)} g(t)dt \Big) dm(x) = \int_2^\infty g(t)\, m(\{x \in X \mid f(x) > t\})dt.$$

(3) 上の (2) における $(X, \mathcal{B}, m)$ と f に対し，さらに次の条件を仮定する．

$$m(\{x \in X \mid f(x) > t\}) = O\Big(\frac{1}{t(\log t)^p} \Big) \qquad (t \to \infty \text{ のとき}).$$

ここで大文字 O はランダウ記号である．このとき，$p - 1 > q \geq 0$ ならば

$$\int_X f(x)\{\log f(x)\}^q dm(x) < \infty$$

となることを示せ．

[8] $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$, $g(z) = \pi \dfrac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ とする．$n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n = n + \frac{1}{2}$ とし，Γ_n は $a_n + ia_n$, $-a_n + ia_n$, $-a_n - ia_n$, $a_n - ia_n$ を頂点とする複素平面上の正方形の周を反時計回りに回る曲線とする．

(1) $\displaystyle\int_{\Gamma_n} f(z)g(z)dz$ を求めよ．

(2) n によらない定数 M が存在して $\displaystyle\sup_{z \in \Gamma_n} |g(z)| < M$ となることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_{\Gamma_n} f(z)g(z)dz = 0$ を示せ．

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ の値を求めよ．

[9] $a, b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ として, 微分方程式

$$(*) \qquad x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2} + ax\frac{df(x)}{dx} + bf(x) = c(\log x)^n, \quad x > 0$$

を考える.

(1) $g(t) = f(e^t)$ とおく. g の満たす微分方程式を示せ.

(2) $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$, $n = 2$ のとき $(*)$ の一般解を求めよ.

(3) $c = 0$ とする. $(*)$ の任意の 2 つの解を u, v とする. このとき

$$x^a\left(\frac{du(x)}{dx}v(x) - \frac{dv(x)}{dx}u(x)\right)$$

が定数になることを示せ.

[10] 　母数空間を $\Theta \subset \mathbb{R}$ とする．母数 $\theta \in \Theta$ を持ち分布関数を $F_\theta : \mathbb{R} \to [0,1]$ とする母集団からの無作為標本 $X_1, \ldots, X_n$ $(\in \mathbb{R})$ を考える．また，$T = T(X_1, \ldots, X_n)$ は θ に対する $X_1, \ldots, X_n$ の十分統計量とする．ここで，T が θ に対する $X_1, \ldots, X_n$ の十分統計量とは，T を与えた下での $(X_1, \ldots, X_n)$ の条件付き同時確率分布が θ に依存しないことを意味している．分散が存在する θ の不偏推定量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ について，以下の問に答えよ．ただし，関数 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して，$E_\theta[h(X_1, \ldots, X_n)]$ と $V_\theta[h(X_1, \ldots, X_n)]$ は

$$
\begin{aligned}
E_\theta[h(X_1, \ldots, X_n)] &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x_1, \ldots, x_n) F_\theta(dx_1) \cdots F_\theta(dx_n), \\
V_\theta[h(X_1, \ldots, X_n)] &= E_\theta\left[(h(X_1, \ldots, X_n) - E_\theta[h(X_1, \ldots, X_n)])^2\right]
\end{aligned}
$$

である．

(1) 任意の $\theta \in \Theta$ に対して $E_\theta[(\hat{\theta} - \theta)^2] = V_\theta[\hat{\theta}]$ が成り立つことを示せ.

(2) θ の推定量 $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(T) = E[\hat{\theta}|T]$ を定義する．$\tilde{\theta}$ が θ の不偏推定量であることを示し，任意の $\theta \in \Theta$ に対して $V_\theta[\tilde{\theta}] \leq V_\theta[\hat{\theta}]$ が成り立つことを示せ．

(3) さらに，T が「任意の関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について，$E_\theta[g(T)] = 0$ $(\theta \in \Theta)$ ならば $P_\theta(g(T) = 0) = 1$ $(\theta \in \Theta)$ が成り立つ」という性質をもつ場合に，分散が存在する θ の不偏推定量のうち $\tilde{\theta}$ より分散が小さいものが存在しないことを示せ．

[11] 実数 T, U_0 と関数 $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を与えたとき,

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = f\big(t, u(t)\big) \quad (0 \le t \le T), \\ u(0) = U_0 \end{cases}$$

を満たす関数 $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ を求める常微分方程式の初期値問題を考える. ただし実数 m, M が存在して, f は $f \in C^2([0,T] \times [m,M])$ であると仮定し, u は $u \in C^3[0,T]$ かつ任意の $t \in [0,T]$ に対して $u(t) \in [m,M]$ であると仮定する. また δ を正の実数とする. 小区間 $[a,b] \subset [0,T]$ を定め, その幅を $\delta := b - a$ とする. また小区間の端点 a, b での常微分方程式の解の値 $u(a)$, $u(b)$ をそれぞれ $u_a := u(a)$, $u_b := u(b)$ と書く. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 実数 U_b を $U_b := u_a + \delta f(a, u_a)$ と定める. 小区間の幅 δ に依存しない正定数 C が存在して

$$\big|U_b - u_b\big| \le C\delta^2$$

が成り立つことを示せ.

(2) 実数 α_0, α_1, β_1, および β_2 を与えたとき, 実数 k_1, k_2, および U_b をそれぞれ $k_1 := f(a, u_a)$, $k_2 := f(a + \alpha_0\delta, u_a + \alpha_1\delta k_1)$, および $U_b := u_a + \delta\big(\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2\big)$ と定める. ただし小区間の幅 δ に依存しない正定数 C が存在して

$$\big|U_b - u_b\big| \le C\delta^3$$

が成り立つような実数 α_0, α_1, β_1, および β_2 に関する十分条件を求めよ.