超平面配置の数学

阿部拓郎 *

平成 30 年 7 月 5 日

1　超平面配置ってなんだろう？

数学の用語はとりあえず堅い感じがする。本講演の主題である超平面配置も確かに堅苦しい。英語の直訳なので仕方ないといえば仕方ないのだけれど（なにしろ超平面は hyperplane の訳語なので、これ以外訳しようがない)、イメージが掴みづらい。

もし皆さんが NHK の E テレで放送中の『又吉直樹のヘウレーカ！』の 5 月 30 日放送分 [1] をご覧になっておられれば、超平面配置に対してそのようなイメージを持たずにすむであろう。この回では、超平面配置研究において国際的に中心的な役割を果たしている研究者である、北海道大学の吉永正彦教授が登場し、超平面配置について又吉さんに対してかなり詳しく語っていた。地上波の放送において『超平面配置』なるワードがあれほど登場し、しかもかなり数学的に正確な定義が伝えられるなどということは前代未聞、古今未曾有、空前絶後の出来事であり、これ以降もおそらくこのような機会はないであろう。もし興味を持たれた方がおられれば、是非この放送をご覧になられることをお勧めする。実際私の講演は、この回で吉永さんが語ったこと、語りきれなかったことを補完し、なるべくわかりやすい数学的な証明を与えることになるであろう。とはいえ、もちろん本講演は [1] を見ていない方にもわかるように準備されているので、その点はご安心されたい。

さて、超平面配置の数学の説明に入る。ここまであれこれ書いておいてなんだが、実は超平面配置はたいして難しい対象ではない。二次元空間、つまり座標平面を思い浮かべていただけると、そこに直線を何本か

*九州大学マス・フォア・インダストリ研究所. email:abe@imi.kyushu-u.ac.jp

引いて貰えれば、超平面配置の一例の完成である。もっと簡単に言えば、数直線上に点を有限個、例えば 3 つ、4 つ、5 つ、何個でも良いのでおいたものも超平面配置の一例である。お手元に紙と鉛筆があれば（定規もあったほうが良いかもしれない）、それで何本か線を引けばよいし、学校の校庭に白い石灰で直線を何本か引いたものも、だいたい超平面配置である。

厳密な定義は講演中に行うとして、まずはこのセットアップから始めよう。つまり

数直線上の超平面配置は有限個の点集合

であり,

平面上の超平面配置は有限個の直線の集合

と定義する. 以後、前者を**点配置**, 後者を**直線配置**と呼ぶ.

1.1　点配置

まず点配置であるが、これは非常にわかりやすい。例えば数直線上の座標 $x = 1, 2, 3, 4, 5$ に一つずつ点をおいたものを考えよう。この場合、点は全部で 5 点ある。本当にこれだけであり、これをいろいろ研究するというのが超平面配置である。さて、この状況で何ができるだろう？　たぶんできることは 1 つだけで、この五点が直線をいくつに分割するかを数えるというものである。絵を描けば明らかなように、この五点は直線を 6 つの区間に分割する。うち 2 つは無限まで伸びる区間であり、残り 4 つは長さ有限の区間である。

さて、この試行をどこかで見たことがないだろうか。ここで数直線を道とし、5 点を五本の樹に置き換えてみよう。するとこれは、小学校高学年で習う人は習う（私は習いませんでした）植木算と同じ設定になっていることがわかるだろう。植木算は植木がいくつか植えられていた場合、道がいくつに分かれるか、及び長さが有限の道はいくつ現れるかを問うことが多い。それをちょっと高校数学っぽい言葉にしたのが、点配置といっても間違いない。

しかしここで一つの違いに気づく。つまり植木算は、点配置のように、道のどこに点をおいたかを明示していないのだ。植木がいくつ、という情報しかない。この点において点配置のほうが優れているのかというと実は逆で、むしろ植木算のほうが本質をついている。例えば同じ 5 点で

も, $x = -100, -50, 0, 46, 10000$ という五か所に点を置いた点配置を考えよう。するとこの場合でも数直線は6つの領域に分割され、長さ有限の区間は4つと、結果は変わらない。これもよく考えれば当たり前のことであるが、点配置の場合点がどこにあっても、直線が分割される数も、そのうちで長さが有限の区間の数も、常に一定である。よって植木算は実は、点配置の場合, 区間の分割数は点の場所によらないという、深い事実を使っているのだ！　正確に言えば, 点配置が n 個の点からなっている場合、この点配置によって直線は $1+n$ 個の区間に分割され、そのうち $n-1$ 個が長さ有限となっているということである。この1を足したりしているという部分は後に現れるので、ご記憶いただきたい。

しかし逆に言えば、植木算はつまらないとも言える。つまり植木の数だけですべてが決まってしまうのだ。これほど掘り下げようがない問題も珍しい。実際植木算を習うときも、植木算自体が問題になることは稀で、これを応用したり、その考え方を用いることのほうが多いはずである。しかし実際、この事実、つまり植木算において植木の数しか分割区間の数に寄与しないという事実は、のちのち極めて重要となる。

1.2　直線配置

次に平面中の直線配置を考えよう。例えば最も簡単な例として、$x = 0,\ y = 0$ という x 軸及び y 軸をなす2直線からなる直線配置などがその一例である。この配置に対しても、同じような問題を考えよう。つまり直線が平面をいくつの領域に分割するかを考える。この2軸からなる配置は、いわゆる第一、第二、第三、第四象限に平面を分割するので、4つの領域に分割する。

実際、平行でない2直線は常に4つへと分割するので、植木算と同じように嫌な予感がしてくるが、3本にした途端この予感は杞憂となる。以下の2つの配置を考えよう：

$$\mathcal{A} : x = 0,\ y = 0,\ y - x = 0 \text{ の3本からなる直線配置.}$$
$$\mathcal{B} : x = 0,\ y = 0,\ y - x = 1 \text{ の3本からなる直線配置.}$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ それぞれに対応する平面の分割数を $c(\mathcal{A}), c(\mathcal{B})$ とかこう。すると絵を描くことで容易に

$$c(\mathcal{A}) = 6,\ c(\mathcal{B}) = 7$$

となり、直線の本数は同じでも分割数が異なることがあるとわかる。$\mathcal{A}$ の分割領域はすべて面積が有限ではなく、$\mathcal{B}$ は一つだけ面積有限の三角形が現れている。

さて、この違いをどう捉えたらいいだろう？　点配置の場合は点の数だけが重要であった。直線配置においても無論直線の数は重要だろうが、描いてみれば分かる通り、それらがどう交わっているかも重要になってくる。つまり点の情報、より正確には交点の情報である。$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の交点の情報は以下の通りである：

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\ :\ (0,0) \text{ のみ}. \\ \mathcal{B} &\ :\ (0,0),(0,1),(-1,0) \text{ の三点}. \end{aligned}$$

ここで非常に安直な予想を立ててみよう。すなわち、**直線配置の分割数は直線と交点の数だけで決まる**という予想である。$\mathcal{B}$ の場合を見てみると、直線数は 3, 交点数も 3 である。植木算の場合常に区間分割の数は,『1+点の数』だったことを思い出して同じことをしてみると,

$$1 + \mathcal{B} \text{ の直線の数} + \mathcal{B} \text{ の交点の数} = 1 + 3 + 3 = 7 = c(\mathcal{B})$$

となり、全く同じ公式が成立している！　しかしこの安直な予想は $\mathcal{A}$ の場合で早速否定される：

$$1 + \mathcal{A} \text{ の直線の数} + \mathcal{A} \text{ の交点の数} = 1 + 3 + 1 = 5 < 6 = c(\mathcal{A}).$$

しかしここで諦めてしまっては数学者にはなれない。諦めず、よく $\mathcal{A}$ の絵を見てみよう。するとそこに現れる唯一の交点たる原点は, $\mathcal{B}$ に出てくる 3 つの交点とは少し様子が違うことが見て取れる。すなわち $\mathcal{A}$ の唯一の交点たる原点は, 3 直線すべてが通っているのに対し、$\mathcal{B}$ の 3 つのそれらはそれぞれ, 2 直線しか通っていないのだ。この観点から見れば、これらの交点は異なると見るのが自然である。よってその違いを反映させてみよう。

交点を作るには無論、2 直線が必要だ。$\mathcal{B}$ においてはそういう交点しかなく、そうしてできる『一番簡単な交点』を一つと数えて、それらが 3 つあるとして公式を導出した。とすれば $\mathcal{A}$ に現れる 3 直線が交わる交点は『少し複雑な交点』である。よってこれを一つの点と思わず、2 点分の寄与があると考えよう。すると $\mathcal{A}$ の交点は一つでも点としての寄与は 2 となるので、

$$1 + 3 + 2 = 6 = c(\mathcal{A})$$

となって公式は成立する。つまり交点にその複雑さから定まる『重さ』をのせて考えれば、常にこの公式が成立しそうな気がしてくる。実際そのとおりであることを、この講演では示したい。それを説明するため、以下のような定式化を行う。

$\mathcal{C}$ を n 本からなる平面中の直線配置とし、$P(\mathcal{C})$ でその交点全体の集合を表す。点 $p \in P(\mathcal{C})$ に対して $\mu(p)$ を, $\mathcal{C}$ に含まれる直線で, p を通るものの数から 1 を引いたものとして定義し、更に

$$p(\mathcal{C}) := \sum_{p \in P(\mathcal{C})} \mu(p)$$

とおこう. すると以下が成立する：

$$c(\mathcal{C}) = 1 + n + p(\mathcal{C}).$$

本数が 10 本くらいまでの直線配置ならば、すべての値は簡単に計算できるので、興味のある方は是非いろいろな例を自分で作ってみて計算されてみることをお勧めする。この定理は **Zaslavsky の定理**と呼ばれ、証明されたのは実は 1975 年 ([2]) とかなり最近である。Zaslavsky はこれを一般の次元、つまり点配置や直線配置を一般化した、まさに**超平面配置**に対して証明した。これが超平面配置研究の幕開けであった。

本講演では、この直線配置に対する Zaslavsky の定理を証明する。その中で、点配置による直線の分割数は点の数にしかよらないとした、私がつまらないと断じた植木算の原理が強力に効いてくる。つまらないとしたのは私の見識不足であり、実は極めて深い数学的な面白さがそこには隠れているのである。

ここまでを講演の前半とし、残った時間で超平面配置の定義を行った上で、グラフの彩色数（辺で繋がれている頂点は違う色で塗るという、いわゆる四色問題に出てくる彩色）と超平面配置、及び上で述べた Zaslavsky の定理との関連について述べたい。

参考文献

[1] 又吉直樹のヘウレーカ!「夜の標識 光って見えるのはなぜ?」(NHK E テレ) 2018 年 5 月 30 日.

[2] T. Zaslavsky, Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **1** (1975), no. 154.