素数と幾何学

勝田　篤 (九州大学数理学研究院)

2021 年 8 月 7 日 (土)

概要

午前中：素数が無限個あることはご存知ではないでしょうか？現代ではさらに詳しく x 以下の素数の個数が x と共にどれくらい増大するか (素数定理)，等差数列の中に素数がどれくらい存在するか (ディリクレの算術級数定理) 等が知られています．さらにリーマン予想等の素数定理の精密化に関する未解決問題もあります．これらについてまず，概要をお話しします

午後：午前中の話は整数の世界のお話ですが，この話の幾何学版も知られています．例えば負曲率リーマン面と呼ばれる曲面上で，素閉測地線 (素数の幾何学的類似) の本数も，その長さを素数の大きさと考えると，素数と同じような分布をしていることが知られています．後半では，リーマン面における素数定理である素測地線定理や，ディリクレの算術級数定理の幾何学版やさらにある場合にはリーマン予想の類似が成立することについて説明します．さらに素数の場合には対応する結果が知られていない “無限次拡大” という状況における幾何学的結果や．さらに時間があれば，一見，関係しないように思われるランダムウォークや熱伝導方程式とのつながりについてもお話しできればと考えています．

本文では，高校で学ぶと思われる以下の事項をついてもおおよその説明をしていますが，詳しいことは他の本やインターネットを参考にしてください．

「等差数列，等比数列及びその和を表す公式，数列の和を表す記号 $\sum$, 対数，特に自然対数の底 e, 定積分の意味」

ただし，結果の紹介の中にはある程度高度な概念を定義を与えずに用いている部分もあることも注意しておきます．これらは，わからなくても他の部分にはあまり影響しないので適当に無視するなり，調べるなりしてください．

最後に，以下ところどころで現在，執筆中の「リーマンと幾何学」(共立出版) より引用（一部改変）しており，説明の重複等もありうることをお詫びしておきます．

1　素数の話

素数とは，$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$ と続くその数自身と 1 以外では割り切れない数ですが，また $1, -1$ 以外のどんな整数も素数の積で表すことができます．このような意味は，これ以上分けられないもの，数の世

katsuda@math.kyushu-u.ac.jp

界での “原子” あるいは根源的な数として古来から人々の関心の対象となっています．特に素数の “個数” を数えることは自然に考えられる問題です．

1.1　素数の無限個存在１：ユークリッドとサイダック

「素数が無限個存在する」ことが，述べられている最古の記録はユークリッドの「原論」(紀元前 3 世紀) とのことですが，おそらくそれより以前にこの事実は知られていたように思われます．ここでは，まず次の 3 つの証明を紹介します．

■背理法による証明　有限個しか素数が存在しないと仮定し，それらすべてに番号をつけて $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とする．このとき，$n = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ は，$p_1, p_2, \ldots, p_n$ で割り切れない．一方 $n \neq 1, -1$ であるので，n は素数の積で表されるが，その一つ p(このような素数 p を n の素因数という) で n は割り切れるので，p は上記の $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とは異なる．これは，当初の仮定では「$p_1, p_2, \ldots, p_n$ がすべての素数である.」としたがそれ以外にも素数が存在することになり，矛盾する．

■ユークリッドによる証明　ユークリッドの証明は上記の背理法の証明とは似ているといえなくもないが，厳密には背理法ではなく，無限個の素数を帰納的に構成するものである．

$p_1 = 2$ から始めて，$p_1, p_2, \ldots, p_n$ が構成されているとする．このとき p_{n+1} を $n = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ の素因数の一つとする．すると上記の証明と同様にして p_{n+1} は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とは異なる新たな素数であることが分かる．これを繰り返せば無限個の素数が得られる．

このようにして得られる素数をユークリッド素数という．はじめの数個の例は

$$2, 3, 31, 211, 2311, 30031, 510511, 9699691, 223092871, 6469693231, \ldots,$$

「すべての素数はユークリッド素数であるか？」というのは未解決問題として知られている．

■フィリップ・サイダックによる証明 (2006 年)　n は 2 以上の整数とする．n と $n+1$ は互いに素なので，$N_2 := n(n+1)$ は少なくとも 2 つの異なる素因子を持つ．同様に，N_2 と $N_2 + 1$ は互いに素なので，$N_3 := N_2(N_2 + 1)$ は少なくとも 3 つの異なる素因子を持つ．この操作を続けることにより，任意に多くの異なる素因子を持つ数を構成することができるので，素数は無限個存在する．

■その他の証明　上記以外の証明もいろいろ知られている．例えば，フリー百科事典「ウィキペディア (Wikipedia) 素数が無数に存在することの証明」を参照 (英語版「Euclid’s theorem」の方が情報が多い．)

1.2　素数の無限個存在２：オイラー

レオンハルト・オイラー (Leonhard Euler, 1707 年 4 月 15 日 – 1783 年 9 月 18 日) は，18 世紀の数学者・天文学者（天体物理学者)．18 世紀の数学界の中心となり，続く 19 世紀の厳密化・抽象化時代の礎を築いた数学者としての膨大な業績と，後世の数学界に与えた影響力の大きさから，19 世紀のカール・フリードリヒ・ガ

ウスと並ぶ数学界の二大巨人の一人とも呼ばれている.（フリー百科事典「ウィキペディア (Wikipedia) レオンハルト・オイラーより）

オイラーの数学的業績に素数に関する研究がある．その一つはやはり，素数の無限性の別証明を与えるものであるが，実際は単に無限個あるだけでなく，素数の逆数の和が発散する (無限大になる．) を示しているし，さらにその後の研究で重要となるゼータ関数を (実質的に) 導入した．その中には一見，不思議な等式

$$1+2+3+4+5+\cdots=-\frac{1}{2} \tag{1.1}$$

等も含まれる.

■素数の無限性: オイラー積　オイラーは次の無限積 (「オイラー積」) を考察した.

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{7}}\right)\cdots$$

これをまとめて

$$\prod_{p:\ \text{素数}}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

とかく．ここで，$\prod_{p:\ \text{素数}}$ は素数 p を $2,3,5,7,11,\ldots$ と順に動かしたときの各 $\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$ すべての積を表す.（$\prod$ はギリシャ文字で円周率 π の大文字のパイ，和を表す記号 $\sum$ の “積” 版, ただし，$\sum$ については少し後で説明する).

■等比級数の和に関する公式　: もし $|x|<1$ ならば次が成り立つ.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots \tag{1.2}$$

この式は高校では数 III で学ぶと思われるが，念のため証明の概略を述べる．まず

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}x^n=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^N=\frac{1-x^{N+1}}{1-x} \tag{1.3}$$

が成り立つことに注意する．ここで $\sum_{n=0}^{N}a_n$ は a_n を $n=0$ から順番に $n=1,2,3,\ldots,$ を $n=N$ まで足した合計を表す記号であり，　$\sum$ はギリシャ文字 (大文字) でシグマと呼ぶ．上の式 (1.3) は $a_n=x^n$ の場合である．また 0 ではない数 x の 0 乗は $x^0=1$ である.（より正確にはこのように定義する．そうすると都合がよいということである．）もし上の式 (1.3) が示されれば，$|x|<1$ の場合，$N\to\infty$ ならば $x^{N+1}\to 0$ であるので目的の式 (1.2) が得られる．(1.3) は高校 2 年までに学ぶと思われるが，念のため証明する.

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}x^n=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^N$$
$$xS_N=\sum_{n=0}^{N}x^{n+1}=x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^N+x^{N+1}$$

において，上の式から下の式を引く．すると $x,x^2,\ldots,x^N$ はキャンセルするので

$$(1-x)S_N=S_N-xS_N=1-x^{N+1}$$

が得られる．両辺を $(1-x)$ で割れば，式 (1.3) が証明された.

■素因数分解の一意性　式 (1.2) の x に $\dfrac{1}{p}$ を代入し，$\displaystyle\prod_{p:\ 素数} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$ を計算する．

$$
\begin{aligned}
&\prod_{p:\ 素数} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right) \\
&\quad \left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)\cdots
\end{aligned}
$$

を展開するとその各項は

$$\frac{1}{2^a 3^b 5^c \cdots} \tag{1.4}$$

で表される．ただし，$a, b, c, \ldots$ は 0 以上の整数である．

一方，どんな自然数 n も，素数の積

$$n = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3} 7^{a_4} \cdots$$

に分解され，さらにこの分解の仕方は順序の違いを除けば一通りである (「素因数分解の一意性」と呼ばれる)．そうすると上の分数 (1.4) の分母には，すべての自然数が，それぞれ 1 回だけあらわれることになる．すなわち，次の式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\prod_{p:\ 素数} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

この式の右辺は無限大であることが，例えば以下のように示される．

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\cdots \\
&> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

この式の右辺は $\frac{1}{2}$ を無限個足すわけであるから，無限大に発散することが分かる．

■「素数の無限性の別証明」　素数が有限個しかないとすると，式 (1.5) の左辺は，有限個の積であるから有限値であるが，一方，右辺は上で示したことより，無限大であるので矛盾する．

実はオイラーの議論からは，単に素数が無限個あるだけではなく，「どのくらいの無限」であることもある程度わかる．

■素数の無限性：説明その 1　上記のオイラー積を少し変形し，$s>1$ に対し

$$\prod_{p:\ \text{素数}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

を考える．これは，$\zeta(s)$ とも書かれ，**リーマンゼータ関数**とよばれる変数 s の関数であり，上の形は $\zeta(s)$ **のオイラー積表示**といわれる．さらに上の証明とほぼ同様の議論により，これを展開すると，その各項は (1.4) の代わりに

$$\frac{1}{(2^s)^a(3^s)^b(5^s)^c\cdots} \tag{1.7}$$

というものになり，さらに同様の議論を続けると

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \prod_{p:\ \text{素数}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \\ &= 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots\end{aligned} \tag{1.8}$$

と書けることがわかる．$s>1$ であれば，$\zeta(s)$ は有限値であることが知られている．このことは高校の数 III で学ぶ積分を用いれば示すことが可能であるが，例えば，$\zeta(2)<\infty$ については，積分を用いないでも以下のように示すことができる．

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots \\ &< 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\cdots \\ &= 1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\cdots \\ &= 1+\frac{1}{1}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)++\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots\left(-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}\right)-\frac{1}{n}+\cdots \\ &= 2\end{aligned}$$

実は $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ が知られている．これは「バーゼルの問題」とよばれていたが，この問題もオイラーが解決した．オイラーは生涯で，この問題の証明を，直観的なものや数学的に厳密なもの等の何通りも与えている．

以上の事実より「素数は “$\zeta(1)$” $=\infty$(上のオイラーの証明) であるくらいたくさんあるが，$\zeta(2)=\infty$ であるほどは多くはない.」ということでおおよその素数の集合の大きさをはかっていると考えることができる．

■素数の無限性: 説明その 2 (逆数の和の発散)　オイラーはさらに素数の逆数和の発散

$$\sum_{p:\ \text{素数}} \frac{1}{p} = \infty$$

や，さらにより強い主張である．

$$\sum_{p\ \text{は}\ x\ \text{以下の素数}} \frac{1}{p} \sim \log(\log x)$$

を示している．ここで, 右辺の log は自然対数と呼ばれる関数でもう少し後で説明する．また $\sim$ は $f(x)\sim g(x)$ が $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ を意味するということである．(lim の意味を知らない場合は x がどんどん大きくなると

$\frac{f(x)}{g(x)}$ がどんどん 1 に近づくという意味と考えておけばよい．）後者のより強い主張も，おおよその方針としては「オイラー積の自然対数を考える」ということで示すことができる．(この方針で，主張をきちんと示すことは大体大学１，２年生の演習問題くらいの難しさであるが，特に新しい概念が必要なわけではないので，高校生でも可能ではある.）

ここでは,「素数の逆数和の発散」のみではあるがもう少し簡単な別証明を紹介する．尚,「現在まで知られている素数だけでその逆数を考えると，それらすべて合わせても合計で 6 以下である.」らしい．これは理論と数値計算のギャップを表す一つの例と考えられる．

■素数の逆数和の発散の別証明 (Clarkson 1966 年)　素数全体に順番を付け，n 番目の素数を p_n とする．もし素数の逆数の総和が有限，すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n} < M < \infty$$

を満たす M が存在すると仮定する．そうすると N 番目までの素数の逆数の和を S_N とする．すなわち

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{p_n} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_N}$$

とすれば，S_N は N について単調に増加する．仮定より $N \to \infty$ としてもこれは，M 以下であるので，十分先の順番 K で

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n} - S_K = \sum_{n=K+1}^{\infty}\frac{1}{p_n} < \frac{1}{2}$$

を満たすものが存在する．(もう少し説明すると S_N は単調増加で，M 以下であるので，$N \to \infty$ であるとき，S_N がある極限に限りなく近づくことがわかるのでこのことがしたがう.）

ここで $Q = p_1 p_2 \cdots p_K$ とおく．すると

$$Q+1, \quad 2Q+1, \quad 3Q+1, \quad \cdots$$

はすべて $p_1, p_2, \ldots, p_K$ で割り切れないのこれらの数の素因数は下付き番号が $K+1$ 以上の素数である．よって

$$\frac{1}{2Q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2nQ} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nQ+1} < \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=K+1}^{\infty}\frac{1}{p_n}\right)^m < \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

が得られる．一方, この式の左辺は (1.6) より無限大であるので矛盾が得られた.

1.3　素数定理

前節のオイラーの議論も素数の個数をある程度見積もっているといえるが，もう少し明確な表現が以下の素数定理である．まず，$\pi(x)$ を x 以下の素数の個数とするとき，次の定理がそれである．

定理 1.1.

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

ここで $f(x) \sim g(x)$ についてはすでに述べた．右辺の分母にあらわれる $\log x$ は自然対数と呼ばれる関数でやはり数 III で学ぶが，ここで一通り説明しよう．

■対数　はじめに，1 以外の正の数 a および正の数 x に対し，a を底とする x の対数 $\log_a x$ を定義する．

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

という関係にある．例えば，$3^2 = 9, 3^3 = 27, 10^4 = 10000$ なので上の関係式を用いると

$$\log_3 9 = 2, \quad \log_3 27 = 3, \quad \log_{10} 10000 = 4$$

であることがわかる．要するに $y = \log_a x$ とは a を y 乗すると x になるような数 y のことである．ただし，一般に a, x, y は実数であるため，この定義が意味を持つためには a の実数乗 a^y が定義されている必要がある．念のためまずこちらの定義について説明する．

■正の数の実数乗

1. y が自然数 n のときは，$a^y = a^n = a \times a \times \cdots \times a$ (a を n 回かけ合わせる) であった．このとき指数法則とよばれる次の式が成り立つ．

$$a^{m+n} = a^m a^n, \tag{1.9}$$
$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{1.10}$$

ここで $X = a^m, Y = a^n$ と置くと，定義より，$m = \log_a X, n = \log_a Y$ であり，式 (1.9) は

$$a^{\log_a X + \log_a Y} = a^{m+n} = a^m a^n = XY = a^{\log_a (XY)}$$

であるから，

$$\log_a X + \log_a Y = \log_a (XY) \tag{1.11}$$

がいえる．さらにこれを繰り返すと

$$n \log_a X = \log_a (X^n) \tag{1.12}$$

が導かれることに注意しておく．

2. $y = n = 0$ のとき：式 (1.9) で $n = 0$ を形式的に代入してみる．（この段階では a^0 はまだ未定義なので，(1.9) が $n = 0$ で成り立つわけではないことに注意せよ．）すると，

$$\text{左辺} = a^{m+n} = a^{m+0} = a^m \quad \text{右辺} = a^m a^n = a^m a^0$$

であるので，左辺 = 右辺であるためには，$a^0 = 1$ と置けばよいので，それを定義とする．

3. $y = -n$ が負の整数のとき：同様に (1.9) が成立するように定義する．

$$1 = a^0 = a^{(-n)+n} = a^{-n} a^n$$

より，$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ と定義すればよい．

4. y が有理数のとき:$y = \frac{p}{q} = p/q$ (p, q は整数で $q > 0$ とする) とおく．式 (1.10) が成立するように定義する．
$$(a^{p/q})^q = a^{(p/q)q} = a^p$$
であるので，$a^{p/q}$ は q 乗すると a^p になる数，すなわち a^p の q 乗根 $\sqrt[q]{a^p} = a^{p/q}$ と定義する．
5. y が実数の時：y を近似する有理数の列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ をとり，a^y を a^{y_n} の極限として定義する．（この極限が近似有理数列 $\{y_n\}$ の選び方によらないことは示す必要がある．）

■常用対数　以上により，正の数 a および実数 y に対し $f(y) = a^y$ が定義されたがこの関数は $a > 1$ なら単調増加，$0 < a < 1$ なら単調減少であることが分かり，$y = \log_a x$ を先述のとおり $x = a^y$ を満たす実数として定義する．底 $a = 10$ の対数 $\log_{10} x$ は常用対数と呼ばれ，大体，x が何桁か (何桁の整数部分を持つか) を表す．例えば $2^{10} = 1024$ は 4 桁であり, これは
$$3 = \log_{10} 10^3 < \log_{10} 2^{10} = \log_{10} 1024 < \log_{10} 10^4 = 4$$
ということであるが，$2^{10} = 1024$ であることを知らなくても，上の式は $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$ であることを知っていれば, $\log_{10} 2^{10} = 10 \log_{10} 2 \fallingdotseq 3.010$ という計算からもわかる．もちろん，この例においては $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$ の方が $2^{10} = 1024$ より難しいので奇異に感じるかもしれないが，かつて，コンピューターが現在ほど発達していない頃は，対数表と呼ばれる対数の値の一覧表が大きな数の計算に用いられていた．

■自然対数　常用対数は，桁数を表すということであるが，これは数の表記が 10 進法を用いているということによる．しかし，理論的にいえば，底を 10 ではなく，以下で定義するネイピア数と呼ばれる数 e を用いる方が便利なことが多い．例えば，微積分の公式はそのような例である．底 e とする対数関数 $\log_e x$ を単に $\log x$ と書き，これを自然対数と呼ぶ．（はるか以前，私が高校生の頃は $\log x$ と書けば数 I，数 II では常用対数を表し，数 III では自然対数を表すことになっていたようである．現在もこの紛らわしさをなくすため工学などでは，自然対数を $\ln x$ と書くこともある．

■ネイピア数 e　e をネイピア数と書いたが，私がこの名前を知ったのは大学入学後であり，高校では自然対数の底と呼ばれていたように思う．この数の意味の直観的説明では，銀行の利子の計算法である複利法を用いるとわかりやすい．銀行に預金すれば，初めに預けたお金 (元本（がんぽん)) に利子が付くことが多い．その利子の計算法には単利法と複利法がある．単利法というのは例えば元本に対し年 1% の利子が付くとすれば，元本 10000 円に対し，1 年後の預金額は 1% の利子 100 円が付くので 10100 円，2 年後も同じ利子が付くので 10200 円，同様に 3,4,5 年後にはそれぞれ 10300 円,10400 円,10500 円となるわけで，利子は当初の元本についてのみ付くという計算法である．これに対して複利法というのは，1 年後は 10100 円で変わらないが，2 年後の計算では，10100 円を新たな元本として利子を計算する方法で，その利子は $10100 \times 0.01 = 101$ 円になる．つまり，この方法では毎年その前年度の預金額が 1.01 倍されていくわけである．複利法の方がリーズナブルと考えられており，現実の利子計算でもこちらが採用されている．

さてネイピア数の説明のため，利子が年 100% と仮定する．ハイパーインフレーションという経済状況下では，このようなことが実際に起こりうる．このとき，上の説明のように利子の計算が 1 年後であれば，元本 1 に対し，1 年後の預金額は 2 である．ここでもし，利子の計算が年単位でなく，半年単位で複利計算で行われる場合を考えてみると，元本 1 に対し，半年分の利子は 0.5 であるので，半年後の預金額は 1.5 であり，次の半年後は 1.5 が元本でそれが 1.5 倍されるので，1 年後の預金額は $(1.5)^2 = 2.25$ になり，年単位の利子計算の結果 2 より大きい．さらに短期間の単位，例えば月単位あるいは日単位で複利計算をすれば，1 年後はそれぞれ

$$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \qquad \left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$$

になる．さらに時間単位，分単位，秒単位とどんどん時間間隔を短くしていけばその 1 年後の預金額が増えていく．しかし．いくらでも大きくなるわけでなく，その極限値が存在する．その金額が e 円である．ここで $e \fallingdotseq 2.718281828459045\ldots$ であり，また e は無理数であることが知られている．以上まとめると

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

念のためであるが，上の式の右辺である極限が存在することはもちろん証明を要する．さらにここでは，n は自然数としたが，そのかわりに, 正の実数 x に対しても

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \tag{1.13}$$

を示すことができる．素数定理の右辺の関数 $\dfrac{x}{\log x}$ について少しコメントすると，分母の関数 $\log x$ は $x \to \infty$ であるとき単調に増加し，無限大に発散する関数ではあるが，その発散のスピードは，どんなに小さい正の数 ε (イプシロン，ギリシャ文字，数学では小さい数をこの文字で書くことが割と多い) に対する関数 x^ε より，ゆっくりであることが簡単にわかる．すなわち，$\pi(x)$ は x が十分大きければ $x^{1-\varepsilon}$ より大きい．

■素数定理の精密化: 誤差評価　さて素数定理であるが，その右辺は $\frac{x}{\log x}$ ではなく，別の形で書かれることも多い．代表的なものは

$$\mathrm{Li}\, x := \int_2^x \frac{1}{\log t}dt$$

である．ここで，右辺は定積分であり，もし知らなければ，一般に $\int_a^b f(t)dt$ とは xy 平面に $y = f(x)$ のグラフを描いたとき,$a \le x \le b$ の範囲で，このグラフと x 軸とで挟まれる部分の面積と思っていてよい．

$$\frac{x}{\log x} \sim \mathrm{Li}\, x$$

であるので，おおよその振る舞いはどちらも変わらないのであるが，もう少し詳しく見ると $\mathrm{Li}\, x$ の方がよりよく $\pi(x)$ を近似していることが知られている．(それにもかかわらず，なぜ $\dfrac{x}{\log x}$ が用いられるかというのはそれがより簡単な関数という理由による．)

x	$\pi(x)$	$\mathrm{Li}\,x$	$\frac{x}{\log x}$
1000	168	177	145
$10,000$	$1,229$	$1,245$	$1,086$
$100,000$	$9,592$	$9,629$	$8,686$
$1,000,000$	$78,498$	$78,627$	$72,382$
$10,000,000$	$664,579$	$664,917$	$620,421$
$100,000,000$	$5,761,455$	$5,762,208$	$5,428,681$
$1,000,000,000$	$50,847,534$	$50,849,234$	$48,254,942$
$10,000,000,000$	$455,052,511$	$455,055,614$	$434,294,482$
$100,000,000,000$	$4,118,054,813$	$4,118,066,400$	$3,948,131,654$
$1,000,000,000,000$	$37,607,912,018$	$37,607,950,280$	$36,191,206,825$

一般に，ある定数 $C>0$ が存在して，

$$|f(x)-g(x)| \leq Ch(x)$$

が成り立つとき

$$f(x)=g(x)+O(h(x))$$

とかくことがある．この書き方をランダウの記法とよび，$O(h(x))$ の O をランダウのラージ・オーとよぶ．

さて素数定理の精密化であるが，現今最良の近似の誤差は次の結果である（ヴィノグラードフの素数定理)。充分大きな x について，

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\,x+O\left(x\exp\left\{-c(\log x)^{\frac{3}{5}}(\log\log x)^{-\frac{1}{5}}\right\}\right)$$

ただし、$c>0$ は絶対常数である．

また，素数の分布に関する著名な未解決問題である「リーマン予想」は次の誤差評価と同値であることが知られている．

$$\pi(x)=\mathrm{Li}\,x+O\left(\sqrt{x}\log x\right)$$

■歴史と現状　素数定理は，オイラー (Euler)，ルジャンドル (Legendre)，ガウスらにより予想され，リーマンは，この証明のために素数の個数関数 $\pi(x)$ の明示公式を与え，リーマン予想が示されれば，この定理は証明されることを示した．この定理は 19 世紀の終わりにアダマール (Hadamard) およびド・ラ・バレ・プサン (de la Valleé Poussin) により，独立に証明された．尚，リーマン予想は著名な未解決問題であるが，この定理の精密化と同値であることが知られている．

素数定理については，リーマンゼータ関数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ の解析的性質，特に $\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}\,s>1$ で絶対収束級数でまた，$\mathrm{Re}\,s\geq 1$ において $s=1$ で単純極 (simple pole) を持つ以外は非零に解析接続できることを示し，その結果をウィナー (Wiener)・池原のタウバー (Tauber) 型の定理を用いる方法が現在の標準的証明のように思われる．その他にもエルデス (Erdös) やセルバーグによる初等的証明，また現状で最も簡易化されたものとされるニューマン (Newman)・ザギエー (Zagier) の証明等も知られている．最近ではバナッハ環 (Banach algebra) を用いる方法や力学系的な考えによる方法も見つかったようである．

■リーマンゼータ関数と複素解析　先の関数 $\zeta(s) = \displaystyle\prod_{p:\ \text{素数}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ はオイラーが既にその性質をある程度調べていたものである．それが今日，オイラーではなく，リーマンゼータ関数とよばれている理由は，リーマンが明示的に関数 $\zeta(s)$ を定義したこととと，オイラーを超えて s が実数だけでなく複素数の場合も含め考察したことによる．当時，コーシーやリーマンらにより複素解析が発展中であり，そのゼータ関数の研究はその応用でもあった．リーマンは素数に関しては「与えられた限界以下の素数の個数について」という短い抄録しか発表していないが，この論文では，$\pi(x)$ の明示公式やリーマン予想などが述べられており，後世に多大な影響を与えている．さらにこの内容以外にもリーマンは深い研究をしていたようで，20 世紀前半になってから，リーマンの遺稿を調査したジーゲルは，それらを整理し，その一部を「リーマン・ジーゲル公式」として発表した．これらの研究の中には 20 世紀になってからの成果であるハーディらの研究を凌駕するものも含まれていた．

リーマンゼータ関数の複素解析的研究には，大学で学ぶ「複素関数論」が必要であり，ここでは詳しくは述べられないが，結果として

1. 複素数 s を実数 σ, t を用いて $s = \sigma + it$ と書くとき $\sigma = \mathrm{Re}\ s$，$t = \mathrm{Im}\ s$ をそれぞれ，s の実部，虚部とよぶ．このとき $\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}\ s > 1$ で有限の値をとる．(絶対収束する．以下カッコ内がより数学的な表現である．)
2. $s = 1$ で $\zeta(s)$ は無限大に発散する．(1 位の極を持つ．)
3. $s = 1$ を除くすべての複素数で有限値として定義できる．(複素平面全体に解析接続される.)
4. $\mathrm{Re}\ s = 1$ ならば $\zeta(s) \neq 0$

ここでは，上記の「解析接続」については説明できないが，$\mathrm{Re}\ s > 1$ 以外の s については上のリーマンゼ-タ関数の定義式にそのまま s を代入したものではないことに注意しておく．また $\zeta(s)$ の変数 s を複素数に拡張するためには，少なくとも n の複素数乗が定義されていないといけない．これは，

$$n^s = e^{(\log n)s}$$

であるから e の複素数乗，特に e^i の定義に帰着することで定義される．つまり，指数法則が複素数乗についても成立していると考えれば e^i から，すべての複素数 α に関して e^α が定義できるということである．さて e^i の定義であるが，おそらくオイラーが考えたと思われる方法を紹介する．まず実数 $x = y/a$ に対して (1.13) より，

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y/a}\right)^{y/a} = \lim_{y\to\infty}\left(\left(1+\frac{a}{y}\right)^y\right)^{1/a}$$

より両辺を a 乗すれば

$$e^a = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{a}{y}\right)^y = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$$

が得られる．ただし，n は自然数とする．ここで $a = i$ を形式的に代入してみると，上式の最右辺は意味を持

つので，これを e^i の定義とするわけである．尚，さらに，以下の「オイラーの公式」

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が知られている．この式は大学の微積分の講義では，右辺のテーラー展開と e^x のテーラー展開 (ただし，x は実数) に形式的に x のかわりに ix を代入して得られる式を比較するという方法が紹介されるが，そこではむしろ e^{ix} を右辺で定義したと考えられる．ここでも厳密な議論は複素関数論を用いる．一方，鈴木貫太郎氏により，「中学の知識でオイラーの公式がわかる (光文社新書) 」という著書や You tube 動画が作成されているがそこでもおおよその説明は得られる．

(4) から，素数定理が得られた．またリーマン予想とは

「リーマンゼータ関数の非自明な零点の実部はすべて $\frac{1}{2}$ である」

というものである．ただし，ここで非自明な零点というのは，他に負の偶数も零点であることが知られているがこちらは比較的容易に確かめられるので自明な零点と呼ばれており，それら以外の零点なので非自明というわけである．

また，素数分布の研究のためにはリーマンゼータ関数の極と零点の研究が重要である．極は無限大であり，零点は 0 であるから，一見，どうしていわば対極にあるものの両方が関係するかという理由は，素数分布の関連では直接的には $\zeta(s)$ というよりその対数微分

$$(\log \zeta(s))' = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

が関係し，$\zeta(s)$ の零点も極も，その対数微分の極という特異点であるからである．尚，先に述べた，エルデス，セルバーグによる初等的証明とは，複素関数を用いない証明という意味であり，これらもかなり複雑で簡単というわけではない．

1.4 等差数列と素数

■ディリクレの算術級数定理　等差数列 $\{a_n\}$ とは, 初項 $a_1 = a$ および公差 d と呼ばれる整数を用いて

$$a_n = a + (n-1)d$$

とあらわされる数列で，例えば以下の (1) は初項 $a = 1$，公差 $d = 1$，(2) は初項 $a = 3$，公差 $d = 4$ の等差数列である．

(1) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
(2) $3, 7, 11, 15, 19, \ldots$

等差数列は算術数列ともよばれる．通常は級数といえば，数列の和を意味することが多いと思われるが，表題の算術級数は，実際は算術数列でディリクレの算術級数定理とは「初項と公差が互いに素な (無限) 等差数列には，素数が無限個含まれる」というものである．この定理はオイラーにより，特別な場合である初項

$a = 1, 3$，公差 $d = 4$ の場合に示され，一般の場合は予想であったが，ディリクレによって証明された．さらにこの定理の素数定理版である以下の定理が，素数定理を証明したド・ラ・バレ・プサンにより，素数定理の証明とほぼ同時に示された．

ℓ を自然数とし，自然数を ℓ で割った余り $(\mathrm{mod}\ \ell)$ である合同類を対応させる写像 $\Phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ を考え，$\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ の乗法に関する可逆元全体のなす乗法群 $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$ の元 α に対し，$\pi(x, \alpha; \ell)$ を素数 p で $\Phi(p) = \alpha$ を満たし (すなわち初項 α，公差 ℓ の等差数列に含まれる素数)，大きさが x 以下のものの個数を表すとき，次が成立する．

定理 1.2.

$$\pi(x, \alpha; \ell) \sim \frac{1}{\sharp(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times} \frac{x}{\log x}$$

ここで，集合 A に対し，$\sharp A$ で A の元の個数を表す．

以下の説明はある程度知識がある人向けである．この定理は,「体の拡大 (extension of fields)」の言葉で表現できる，$\zeta_\ell = e^{2\pi\sqrt{-1}k/\ell}$ を 1 の原始 ℓ 乗根の一つとし，有理数体 $\mathbb{Q}$ に ζ_ℓ を添加した体 (円分体 (cyclotomic fields)) への拡大 (円分拡大 (cyclotomic extension)) のガロア群 (Galois group)$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell)/\mathbb{Q})$ は $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$ と同型であり，また素数 p に対し，p-フロベニウス写像 (p-Frobenius map) とよばれる $\mathbb{Q}$ の元を固定し，ζ_ℓ を p 乗する円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ の同型写像はガロア群の元とみなせるが，これがガロア群の元の共役類 α に含まれるような x 以下の素数の個数は，先の $\pi(x, \alpha; \ell)$ と一致する．より一般の代数拡大に対しても，ガロア群が非可換の場合も含めて定式化されており，チェボタレフ (Chebotarev) の密度定理 (density theorem) とよばれている．

■チェビシェフの偏り　上記のド・ラ・バレ・プサンの定理より，公差を固定したとき，その初項 α が異なっていても，$\pi(x, \alpha)$ の挙動は大きくは違わないことが分かるが，もう少し詳しい挙動に着目したのがチェビシェフである．例えばオイラーが考察した $\pi(x, 1; 4)$ と $\pi(x, 3; 4)$ の大小を x ごとに比較する．(「素数レース」とも呼ばれる)

さてその結果であるが，おおよそ 99.59% については $\pi(x, 3; 4) > \pi(x, 1; 4)$ であるが，$x \to \infty$ において，いつまでもそれらの大小が入れ替わる区間が生じるというわけで素数レースの決着はつかないということである．

■グリーン・タオの定理　算術級数定理は等差数列の中の素数の分布を調べる話であるが，逆に素数の全体の中での (有限の長さの) 等差数列という話もある．

2006 年にグリーンとタオは次の定理を示した．

定理 1.3. 素数全体の集合を P とするとき，P の中に任意の（有限の）長さの等差数列が存在する．

これは，任意の N に対し，素数からなる数列 $p_1, p_2, \ldots, p_N$ で，ある数 a, d で $p_n = a + (n-1)d$, $(n = 1, 2, \ldots, N)$ とあらわされるものが存在するということである．このとき N をこの等差数列の長さとよぶ．

これは，ある面からは組み合わせ論の一つであるラムゼー理論の結果であるということもでき，この理論に

関しては，ファン・デル・ヴェルデンの定理，ロスの定理，セメレディの定理等の著名な結果も知られていたが，この定理は新たに加わった金字塔ということができる．この業績はタオのフィールズ賞（４０歳以下の数学者に授与されるもので，ノーベル賞に数学部門はないが，数学におけるノーベル賞ともみなされている) の主要な業績の一つに数えられている．ただし，タオにはこの他にも数多くの重要な業績があり，また数学オリンピックに 10 歳から出場し 12 歳で金メダル，24 歳で UCLA の教授就任等，（ある人の表現を借りれば）「一般の人が考える数学ができる秀才」の究極の姿を体現しているような人である．

このことに関する最近の大きな進展を 2 つ紹介する．

一つは，タオはこの定理の拡張として以下の予想をしていた．通常の素数は，代数的整数論の立場では，有理数体 $\mathbb{Q}$ における対象と考えられているが，この拡張として「代数体 (すなわち有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次代数拡大体) の素数に対しても同様の結果が成立するであろう」というものである．（実は 2 度にわたって予想しており，最初は一般的になりたつだろうと予想していたが，2 度目はある程度の限定条件を付けての予想という形に．弱められていた.）　この予想に関して，今年の１月１日に，東北大の６人の数学者による共同研究として arXiv.org というプレプリント・サーバーで，肯定的解決した論文が発表された．この結果は 2 度目の予想での限定条件を仮定しない一般的な状況での解決である．題名には「素数」の代わりに「星座」(タオにより，一般的状況でこの名称が与えられていた）が用いられているため「星座定理」と呼ばれており，その表紙には東北大のマークが書かれている．現在，この結果は雑誌掲載のための査読中と思われる．

もう一つの進展は次のエルデス・チュラン予想

予想 1.4. 自然数列 $\{a_n\}$ が，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$$

をみたせば，$\{a_n\}$ は任意の長さの等差数列を含む．

に関するもので先に述べたオイラーの結果より,$\{a_n\}$ が素数列であればこの予想の仮定をみたすのでグリーン・タオの定理はこの予想の特別な場合である．

これに関する最近の進展は Thomas F. Bloom, と Olof Sisask によるもので「エルデス・チュラン予想の仮定を満たす $\{a_n\}$ は長さ 3 の等差数列を含む」という結果である．$\{a_n\}$ が素数列の場合に，同様の結果は 1939 年にヴァン・デル・コープトにより示されていた．

■双子素数予想　$(3,5),(5,7),(11,13),(17,19)$ のように n および $n+2$ が共に素数であるような組を双子素数という．双子素数予想とは「双子素数は無限個あるだろう」というものでギリシャ時代から 2000 年以上続く未解決問題である．この問題に関し，21 世紀になってから進展があった．その急速な進展時期はしばらく前であるが，ここで紹介する．

2013 年の 4 月に Y.Zhang という人から数学におけるトップジャーナルの一つである Annals of Mathematics に「Bounded gaps between primes」という題名の論文が投稿された．その内容は「その差が 7000 万以下の素数の組の無限個存在」を主張するものであった．この論文に関し，専門家に意見を聞いたところ，「正し

そうである，少なくとも間違いは見つけられない」ということであったので，2000 年来の問題に関する初めてのブレークスルーということでもあり，特別体制で早急に審査することになった．数学の査読は，(特にこの種の雑誌ではなおさら)，数か月から数年かかるものであるが，この論文はわずか一ヶ月で掲載が決定された．Zhang という人は年配であまり知られていない大学所属の無名の数学者だったが，この結果により一躍 (数学の世界での) 有名人になった．

この直後にタオの呼びかけで Polymath という多くの数学者の参加する研究プロジェクトが開始された．Tao, Terence (June 4, 2013). ”Polymath proposal: bounded gaps between primes”.

その結果，上記の「7000 万」という条件は，徐々に改良されていった．Zhang 自身はこの数の改良には関心がなかったようでこのプロジェクトには参加しなかった．しばらくたって，この数は「4680」まで改良され，しばらく定常状態が続き，このままではこれ以上の改善が望めない状況に思われたのでプロジェクトは一旦終了した．ここまでが Polymath8a とよばれ，まとめの論文が書かれた．その後，メーナードが新しいアイデアを出し．Polymath8b が開始され，この結果，その値は「246」まで改良された．（時系列が Polymath「Bounded gaps between primes」にリンクされているがそれによると，Zhang(2013 May 14) で 7000 万が開始で (2014 April 14) に 246?(Clark-Jarvis)A 2-week computer calculation!となっている．）尚，タオもメーナードとは独立に同じようなアイデアを出していたといわれていたがその後，手柄をメーナードに譲ったようだともどこかに書かれていた．

その後は特に変化はないようである．

■算術級数定理といくつかの予想との相違点　素数に関する未解決問題は上記以外でも多くある．例えば「$n^2 + 1$ の形の素数が無限個あるか」というのもランダウの問題と呼ばれる著名な未解決問題である．これらに比較して「なぜ算術級数定理が証明できるか」ということであるが，その理由の一つにはこちらには「群」と呼ばれる対象が関連しているという事実がある．群というのは掛け算，割り算という演算が可能な集合といったもので，ガロアが n 次方程式の (対称性の) 構造を解明するために発見したといわれており，例えば 5 次方程式の解の公式（加減乗除と n 乗根を用いて解を表す公式) が存在しない理由は「5 次方程式のガロア群が一般には可解群でないことである」という群の言葉で表現される．この理論は，体の拡大とそのガロア群の関係に関するガロア理論とよばれ，今日大きく発展している．算術級数定理でも，あるいは上で述べたその拡張であるチェボタレフの密度定理でもガロア群と呼ばれる有限群があらわれ，特にその表現論が有効に使われる．これは一種のフーリエ解析の理論ということができる．ただし，このような述べ方は，後になって議論を整理した結果であり，ディリクレの時代に，明確にこれらの概念が知られていたわけではない．後半部では算術級数定理の幾何学版について説明するが，ここで述べた考え方を幾何学の問題に適用したということである．

■素数とランダムネス　双子素数予想には，単に無限個存在だけでなく，素数定理のようなもっと精密な予想が知られている．この予想や上記のランダウの問題，グリーン・タオの定理も，もし「素数が完全にランダムに分布している」と仮定すれば，比較的容易に示すことができる．さらにこれらをすべて含む Bateman-Horn 予想というものもあるがこれも同様である．

グリーン・タオの定理の証明では，素数の完全なランダムネスはもちろん示されていないが，ある意味それに近い擬ランダムネス (pseudo randomness) という性質は有効に使われているそうである．これについては，検索すればタオの講演ビデオが見られると思われる．

2　幾何学における “素数”

はじめに幾何学における素数の類似としてはこれから述べる「素閉測地線」以外にも別の立場で「結び目」というものも考えられており，九大の森下昌紀氏は後者に関する日本における第一人者である．

やはり，「リーマンと幾何学」の引用から始める．

リーマンには「与えられた限界以下の素数の個数について」という著名な論文がある．この論文は，6 ページの短いものであるが，その中でリーマンゼータ関数の複素解析的研究，特に解析接続，関数等式，素数の個数関数の明示公式，リーマン予想等が論じられている．この仕事から，おおよそ 1 世紀後に，この仕事とリーマン多様体を結びつけた研究があらわれた．セルバーグ (Selberg) の研究である．セルバーグは 1954 年に「調和解析と弱対称空間の不連続群およびディリクレ級数への応用」という論文の中では，リーマン多様体の基本群の素な共役類，あるいはそれに対応する素閉測地線を素数の幾何学的類似とみなし，素数に関するリーマンゼータ関数の幾何学的類似として後にセルバーグゼータ関数と呼ばれることになる関数を導入した．例えば定曲率 -1 のリーマン計量を持つリーマン面に対して，セルバーグゼータ関数の性質を調べている．この場合，素数の場合に比べ，リーマン予想が有限個の例外となる零点を除き，成立していることが示されている等，扱いやすい面もあり，これに関する解説もかなり出版されている．ここでは，素数定理の幾何学版である素測地線定理およびリーマンに大きな影響を与えた数学者の一人であるディリクレ (Dirichlet) による算術級数定理の幾何学版について論じることにする．参考文献としては砂田利一 [1] がアーベル拡大に関する話題を扱っている．後半のハイゼンベルグ群による拡大に関する部分については，筆者の執筆中の結果の抜粋である．

2.1　幾何学よりの準備

ここでは特に素数の幾何学的類似として曲率 -1 をもつ閉リーマン面上の素閉測地線について考察する．

はじめに歴史的経緯である「非ユークリッド幾何学 (non Euclidean geometry) の発見」「ガウス (Gauss) による曲面論，特に内在的観点の萌芽」の 2 点について説明する．

■非ユークリッド幾何学

■ユークリッド幾何学と平行線公準　我々をとり巻く物理的空間はどのようなものであるかという疑問は，古代の 4 大文明の頃より現代にいたるまで，継続的に考えられてきた．その空間論の発達に対して，数学的基盤を与えてきたものが，ユークリッド幾何学である．これは，古代においては，紀元前 300 年ごろ，ギリシャの数学者ユークリッド (Euclid，エウクレイデス Eukleídēs) により，「原論」という書物にまとめられた．「原論」は，定義，公準，公理および，それらから演繹して得られる定理からなっており，空間論の基礎を与えるとと

もに，数学的論理的議論の規範となってきた．そこでの「公準 (Postulate)」は以下の 5 つのものである．

公準（要請）

1 すべての点からすべての点へと直線を引くこと

2 有限な直線を連続して 1 直線をなして延長すること

3 あらゆる中心と距離をもって円を描くこと

4 すべての直角は互いに等しいこと

5．もし 2 直線に落ちる直線が，(和が)2 直角より小さい同じ側の内角を作るならば，2 直線が限りなく延長されるとき，(内角の和が)2 直角より小さい側でそれらが出会うこと

公準 5 はわかりにくいが

5′ 直線外の 1 点を通って，その直線に平行な直線が 1 本あり，1 本に限る．

と同値であることが知られている．公準 5 は平行線公準 (parallel postulate)，平行線公理等とも呼ばれる

平行線公準は他の公準に比べて，複雑であり，他の公準から証明されないかという問題が古くから考えられ，多くの研究が生まれた．

その中でも特筆すべきものとして，サッケーリ (Saccheri)，ランベルト (Lambert) の研究がある．また，彼らは，公準 5 を否定した場合に成立する命題についても研究した．これらは (彼らは認識していないが) 後述の双曲幾何学 (hyperbolic geometry) や楕円幾何学 (elliptic geometry) に関する先駆的研究ともいえる．しかし，これらはユークリッド幾何が正しいことの証左としたようである．

■双曲幾何学　これに対し，1820 年代にガウス，ロバチェフスキー (Lobachevsky)，ボーヤイ (Bolyai) の 3 人により，全く独立に，平行線公準を否定，すなわち平行線公準を「平行線が複数存在する」という公準に置き換えても整合的な幾何学が成立することが，示された．時間的にはガウスが最も早いとされるが，哲学や神学的方面からの攻撃を恐れ知人への書簡の中で言及したに過ぎない．世に公表したのは他の 2 人である．このためしばしばこの幾何学はロバチェフスキー・ボーヤイの幾何学とも呼ばれるが，双曲幾何学という用語が普及している．

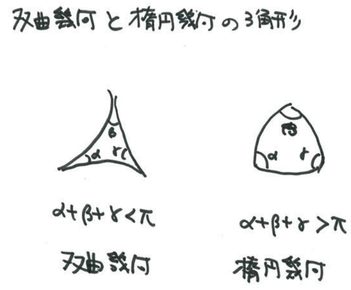
この幾何学の特徴は

「三角形の内角の和は 180 度より小さい」．

というものである．これに対し，球面上の幾何である楕円幾何学では逆に

「三角形の内角の和は 180 度より大きい」．

となる．以下にその図を描く．



双曲幾何学は，後述のリーマンの定義した負定曲率の幾何学と結び付き（それを明確に述べたのはその後活躍したベルトラミ (Beltrami) といわれている）さらにこの研究はクライン (Klein)，ポアンカレ (Poincaré) と引き継がれた．さらにその後，この幾何学はトポロジー，数論，解析学，表現論等と結びつき，現代数学の花形の一つとなっている．

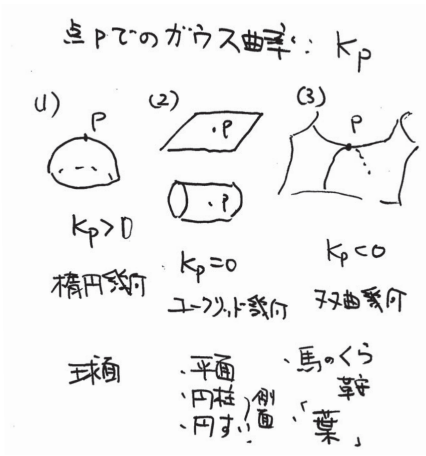
2.2 ガウスの曲面論

通常，曲面といえば，まず，3 次元空間があり，その中に曲面が存在すると考えるがガウスは，曲面それ自身の性質から決まる量 (内在的量) と，曲面が 3 次元空間でどういう位置にあるかということに関係する量 (外在的量) の違いを認識した．ここで内在的量を別の言い方で表現すれば “曲面上に住んでいる 2 次元人” が，もしいたとしたときその人々にとって，「外の 3 次元空間を知らなくても認識できる量」ということができる．

それは以下のガウス驚愕の定理で表される．

定理 2.1 (ガウス驚愕の定理 (ラテン語で Gauss's Theorema Egregium))**.** 曲面のガウス曲率 (Gaussian curvature) は曲面の第一基本形式 (first fundamental form) のみを用いて表される．

以下，この定理の内容の説明を試みる．まず，曲率とは，名前からわかるように曲面の曲がり具合を表す量であり，曲面の曲率にはその測り方により，主曲率，平均曲率，ガウス曲率等いくつかの種類がある．ガウス曲率は実数であるが，値そのものよりその符号が重要でおおよそ以下の図のような状況である．

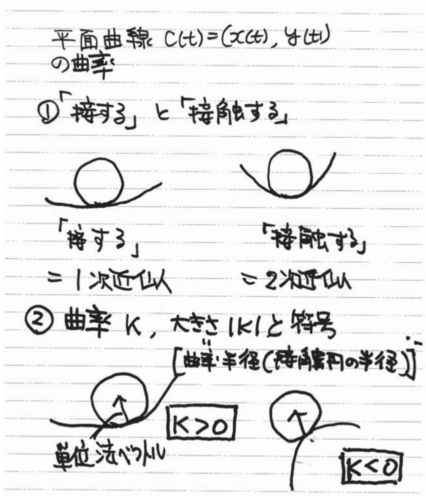


以下，ガウス曲率について説明したい．ただし，本来，曲率は微分を用いて定義されるので，それを用いない説明はなかなか難しいところがあるが，できるだけ直観的に述べたつもりである．

■平面曲線の曲率　まず，座標平面 (xy 平面) 内の曲線 c の点 $c(t)$ を

$$c(t) = (x(t), y(t))$$

とパラメーター表示する．この表示に慣れていなければ，曲線を平面内の点の運動の軌跡と考えれば $c(t) = (x(t), y(t))$ は時刻 t における点の位置の座標を表していると考えればよい．このように考えたとき，この運動の速度を考える．これは，その点が次の瞬間に動く方向とその速さを表していると考えられ，その点 $p = c(t)$ を始点とする矢印 (その方向は点の動く方向，長さはその点における点の速さ) で表すことができる．これを曲線の速度ベクトルと呼ぶ．平面曲線の曲率とは，曲線のパラメーターをその速度ベクトルの長さが常に 1 になるように調整したとき，すなわち，点の運動としての軌跡は同じだがその速さが常に 1 となるようなものに置き換えたとき，その速度ベクトルの変化の割合と定義する．直観的にいえば，曲線を道路としてその上の点を自動車と考えれば，曲率はそのハンドルをまわす角の大きさと考えてよい．ただし，本当は曲率には正負の符号があり，右回り (の運転) のときを正，左回りのときを負と考える．これには別の言い方もできる．（長さ 1 の) 速度ベクトルを時計と反対方向に 90 度回転したものを曲線の点 p における単位法ベクトルとよび，またこれを含む直線を法線という．法線上の点を一つ選ぶとその点を中心とする円で曲線と接するものを描くことができるが，それらの円の内で曲線を最もよく近似するものが存在する．それを接触円，その半径を曲率半径とよぶ．接する円は一般に 1 次の近似であるがその中で接触円はさらに強く 2 次で近似しているといえる．



その点の曲率は曲率半径の逆数に符号をつけたものと一致する．ただし，その符号は中心が，p から単位法ベクトルの向きに進んだ法線上にある時を正，逆方向に進んだ法線上にある時を負とする．

■3 次元空間内の曲面の第一基本形式　3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S 上の点 p は局所的には，

$$p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \qquad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

とパラメーター u, v を用いて表される．これは，平面曲線のパラメーター表示を次元を 1 つ増やして一般化したもので，曲面が 2 次元であるため，パラメーターは 2 次元分，つまり 2 種類ある．

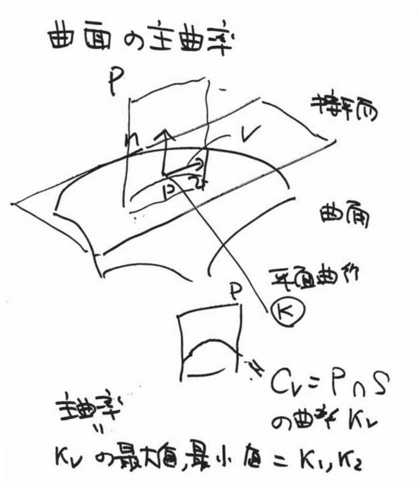
この曲面上の曲線の長さは，その曲線を折れ線で近似してその折れ線の長さの近似極限として定義される．その近似する折れ線は，曲面をはみ出す可能性があり，曲面の入っている 3 次元空間が定義に必要と考えられるかもしれないが，本来曲面に住む 2 次元人でもその動く距離というものは感知できるから，曲面上の曲線の長さは内在的量と考えられる．この曲線の長さの無限小版が上記定理の第一基本形式であり，大体曲線の接ベクトルの長さに対応するが，これも内在的量である．（もしベクトルの内積を学んでいたら，「第一基本形式とは接平面における内積」ということができる．）また第一基本形式は通常以下のように書かれる．

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

この式で，E は u 方向の接ベクトル p_u の長さの 2 乗，G は，v 方向の接ベクトル p_v の長さの 2 乗とみなせる．ただし，ここで, 曲面上の点の表示 $p(u, v)$ において v は $v = v_0$ に固定し，u だけをパラメーターと考えれば $p(u, v_0)$ は曲面上の曲線になるがその曲線の接ベクトルを $p_u = p_u(u, v_0)$ としている．さらに F は，接平面の点，つまり一般の接ベクトル X は，ある実数 a, b を用いて $X = ap_u + bp_v$ とあらわすことができるが，そのとき X の長さの 2 乗が $a^2E + 2abF + b^2G$ であるという部分で登場する．（念のため，付け加えると X が上のように書けるためには p_u と p_v が同じ直線の上にないという条件が必要で，正確にいえばここでの “曲面” とは「このような条件が各点で成立している」と仮定されているものである.）

■3 次元空間内の曲面の曲率　次にガウス曲率について説明する．まず曲面上の点 p を一つ固定し，p で曲面に接する平面 (接平面) に直交する直線 (法線) を考え，その直線に点 p を始点とする長さ 1 の矢印は，互いに向きが逆なもの 2 つが含まれるが，そのうちの 1 つを選ぶ．この矢印を点 p における単位法ベクトルと呼び，n で表す.

ガウス曲率を定義するため，まず主曲率を定義する．曲面上の点 p およびそこでの接平面を考える．接平面は接ベクトルの集合である．p での（第一基本形式に関する）長さが 1 の接ベクトル v と選び，単位法ベクトル n と v を含む平面を P とすると P と曲面との交わりは曲線になるがそれを C_v とおく．C_v は平面 P 内の平面曲線であるが，その平面曲線としての単位法ベクトルと曲面の単位法ベクトル n を同一視すれば，平面曲線 C_v の点 p での曲率 $\kappa(v)$ が定義される．この曲率 $\kappa(v)$ は長さ 1 の接ベクトル v 毎に定義されるが，そのような接ベクトルを動かす. すなわち接平面上で p の中心にぐるっと一回転させるわけであるが，そのときの $\kappa(v)$ の最大値と最小値を (2 つの) 主曲率 κ_1, κ_2 と定義する．



これを用いるとガウス曲率 K は $K = \kappa_1\kappa_2$ で定義される．つまり，2 つの主曲率が同符号の時，ガウス曲率は正であり，異符号の時は，負である．

ちなみに他に平均曲率 H が，$H = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}$ と文字通り主曲率の平均として定義されるが平均曲率がいたるところ 0 の曲面は極小曲面と呼ばれる．この曲面は石鹸膜の数学的モデルとして知られている．

ガウス曲率は主曲率を用いて定義され，主曲率の定義には単位法ベクトル n という 3 次元空間の概念を利用しているので，この定義からは，ガウス曲率が「外の 3 次元空間に依存しない内在的なもの」にはとても見えない．しかしガウスは先に述べたように，実は内在的なものであることを見抜いた．これは彼自身にとっても驚きであったため驚愕の定理という名前がついている．実際，第一基本形式でガウス曲率 K を表現する式を以下に書くが見てのとおりかなり複雑である．以下の式の E, F, G が第一基本形式を表す量であり，例えば E_u, F_{uv} はそれぞれ E の u 方向の偏微分，F の u 方向の偏微分 F_u をさらに v 方向に偏微分した量 (F の 2 階偏微分) を表している．

$$
\begin{aligned}
K = &\frac{E(E_vG_v - 2F_uG_v + G_v^2)}{4(EG-F^2)^2} \\
&+\frac{F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v - 2F_uG_u + 4F_uF_v)}{4(EG-F^2)^2} \\
&+\frac{G(E_uG_u - 2E_uF_v + E_v^2)}{4(EG-F^2)^2} - \frac{E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}}{2(EG-F^2)}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

ガウスはこの結果を「長い暗闇をさまよった後，ようやく導いた」と述べているが，現代的立場からは，リーマン以降発展したテンソル解析を用いることにより，ある程度見通しよく導くことができる．また，この結果は次に述べるリーマンの研究の出発点の一つとなった．

リーマンの研究について述べる前に，ここでガウス驚愕の定理の一つの応用を紹介する．それは「地球上のどんなに狭い地域も平面の地図として正確なものを作成することは不可能である．」ということである．ここで正確な地図とは「元の地域の 2 点の距離とそれに対応する地図上の対応する 2 点との拡大率が 2 点の選び方によらず一定である地図」のことである．その理由は次のように説明できる．平面のガウス曲率は 0 であり，

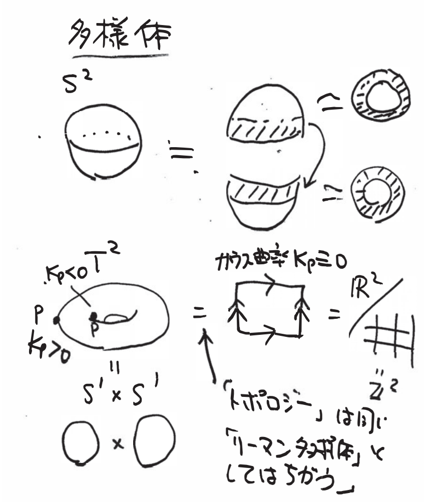
またそれを一定の倍率で拡大してもガウス曲率は 0 のままであることが証明できる．一方，地球のモデルである球面のガウス曲率は正であるので，地図をどういう方法で拡大しても，地球上にぴったりと重ね合わせることはできない．

■多様体とリーマン幾何学　リーマンは，ガウスの後に登場した数学者であるが，今日，先述のリーマンゼータ関数の他，リーマン面，リーマン積分，リーマン多様体，リーマン関係式等その名前がついた数学的概念は数多くある．40 年に満たないその生涯で数多くの業績およびそれだけに留まらず，思想そのものが後世に影響を多大な与えている．しばらく前にリーマン 150 年を迎え，先に引用した執筆中の「リーマンと幾何学」もそれを記念して企画された 4 巻のシリーズの一つである．ちなみに他の 3 冊は「リーマンと数論」「リーマンと解析学」「リーマンの数学と思想」であるが，これらはすでに出版されている．

リーマンは「教授資格取得講演」の中で内在的幾何学についての考え方を発表した．今日，「多様体」「リーマン幾何学」と呼ばれる概念が萌芽がここにある．なおこの講演は数学者向けではなく，哲学者を含む一般の大学関係者を対象に行われたため，数式はあまり用いられていないが，おそらく完全に理解したのはその聴衆の中でガウス一人であっただろうと想像される．そのガウスはこの講演を聞き，感動し，興奮したと伝えられている．

この講演の基礎としてはガウスの驚愕の定理で述べられた内在的概念，さらに，リーマンが別に考察していたリーマン面があったと考えられる．後者は複素数変数に対して定義された複素関数を調べるために考え出されたものである．例えば，ある数の平方根はプラスマイナス 2 つの値をとる．これは平方根を関数として見れば，定義域の各変数に対しその像として複数の値を取りうるということであり，このようなものを一般的に多価関数という．リーマン面はこれを普通の関数 (一価関数) とみなすために定義域を拡張するというアイデアから生じた概念であり，通常の「3 次元空間内の曲面」という範疇におさまらない可能性があった．(これも発祥はガウスが数論の問題を解くためにガウス整数を考察し，その自然な舞台として複素平面を導入したことであった．)

このようなものを含む新しい “空間概念” として「多様体」は考察された　多様体とはどのようなものであるかといえば，局所的に見ればユークリッド空間内の領域であり，それらを張り合わせてできる空間ということができる．つまり，上で述べた曲線のパラメーター t, 曲面のパラメーター u, v をそれぞれ曲線，曲面の局所的な座標と考え，それらの一般化である多様体の場合もその各点の周りにはそのような “局所座標” が与えられているとし，それが重なりあうところでは 2 つの座標同士の変換規則を与えるという意味で「貼り合わせ」が与えられていると考えるわけである．



さらに「リーマン幾何学」とは多様体の局所座標ごとに第一基本形式 (リーマン計量とも呼ばれる) を与え，それが上記の「貼り合わせ」と両立するようにすれば，ガウス曲率などがすべての点で定義できるわけである．このような対象はリーマン多様体と呼ばれる．

このような考え方はとても重要で，例えば「宇宙」を考えると，我々の住んでいる場所の近く (観測可能な範囲) は 3 次元ユークリッド空間であるが，そのようなものがうまく貼り合わさって宇宙全体が形成されていると考えるわけである．このように考えれば「宇宙の入っているの外側の空間？」というものを持ち出さなくても「宇宙の形」は考えられる可能性が出てくるわけである．実際，アインシュタインの一般相対性理論はいわばそれまでとは異なる “新しい物理（空間)” であるが，そのための数学的道具がリーマン幾何学であった．

このようにすると定曲率空間というものが，外側の空間とは独立に内在的概念として考察できるわけであり，リーマンの講演では主にその場合の説明がなされている．さらにリーマンの講演では触れられていないが，負定曲率空間が，先に述べた非ユークリッド幾何学，特に双曲幾何学のモデルとなっていることが後にベルトラミによって指摘された．

2.3　双曲幾何学のモデル空間

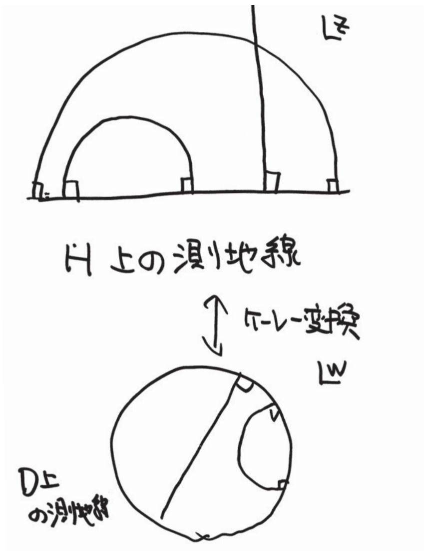
双曲幾何学のモデル空間としてはいくつか知られているが，ここではその内の 2 つ，ポアンカレ上半平面 H と単位円板 D を紹介する．H は，多様体としては上半平面 $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y>0\}$ であり，そのリーマン計量 (第一基本形式) が

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

で与えられている．ただし，ここでは座標 (パラメーター) として u,v ではなく，x,y を用いている．このとき $E=G=1/y^2$, $F=0$ である．このリーマン計量を双曲計量と呼ぶ．この空間のガウス曲率 (高い次元のリーマン多様体も考えるため，その便宜のためガウス曲率ではなく断面曲率と呼ばれている) は一定でその値は -1 である．このことは上のガウスの公式の E,F,G にこの式を代入して計算すれば確かめることができる．

次に測地線について説明する．ユークリッド空間内の測地線は直線に他ならず，測地線は直線のリーマン多様体での一般化である．リーマン多様体の曲線が「その曲線上の十分近い 2 点を取るとその曲線がその 2 点を結ぶ曲線全体の中で最も短いものである (局所的最短線)」という条件をみたすとき，その曲線を測地線という．gg「局所的に」という条件は，測地線が離れた 2 点については必ずしもその 2 点間の最短線を与えるとは限らないことによるが，逆に 2 点間の最短線は測地線である．また，ここで考えている双曲幾何のモデルにおいては 2 点間を結ぶ測地線が，唯一存在し，かつ，それが最短線であることが知られている．

ポアンカレ上半平面 H 内の測地線は x 軸に直交する半円あるいは半直線である．ただし，正確には測地線はパラメーターまで込めたものとして定義されており，ここでは，スピード一定のパラメーターを取っている．さらに，例えば半円は，ユークリッド平面の曲線としてみれば長さ有限であるが，双曲計量は $E = G = 1/y^2$ であるため，x 軸に近づけばその点の y 座標は小さくなるが，双曲計量は $1/y^2$ を含むため，そこではユークリッド計量では小さくても，双曲計量ではかなり大きい．実際，双曲計量で測れば半円の長さも半直線の長さも無限大である．また，任意の測地線とそれに含まれない 1 点 p を考えたとき，p を通り，元の測地線とは，交わらないような測地線が無数に存在するので，ユークリッドの平行線公準は成立しないことが分かる．



さらに H の点 (x, y) を複素数 $z = x + iy$ と同一視し，ケーレー (Cayley) 変換

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

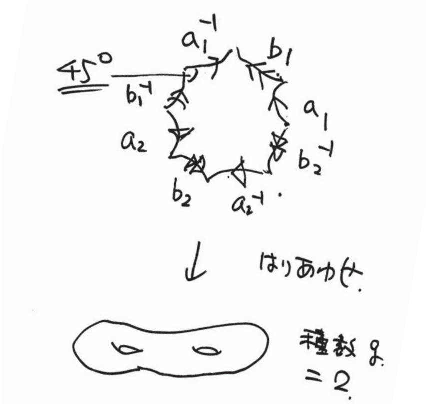
を考えると，単位円板 (ポアンカレ円板モデル)

$$D := \{w = (u + iv) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \mid |w| := \sqrt{u^2 + v^2} < 1\}$$

に 1 対 1，上に移ることが知られている．さらにそのリーマン計量を $\frac{4(du^2+dv^2)}{(1-(u^2+v^2)^2)^2}$) とすれば等長同型 (この変換により，曲線の長さが変わらない．すなわち元の曲線と変換によって移された先の曲線の長さが同じであるということ) になることが知られている．この計量の断面曲率はやはり -1 であり，また D における測地線

は，単位円 $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| = \sqrt{u^2+v^2} = 1\}$ に直交する半円または線分であるがこれらも，この双曲計量では長さ無限大である． H と D はリーマン多様体としては同じもの (等長同型) とみなすことができる．

■コンパクトリーマン面 ここでは D からコンパクトリーマン面 (種数 $g \geq 2$，種数とは "穴" の数のことである．ただし以下の図は $g = 2$ のもの) を構成する一つの方法を述べる．これ以外の構成法としては．数論的方法，張り合わせの方法等が知られている． D の原点を出発する $4g$ 本の線分 $\ell_k = \{w = re^{\sqrt{-1}\theta_k} \mid 0 \leq r < 1, \theta_k = k\pi/2g,\}$ を取る．これらは，うまくパラメーター付けをすれば，リーマン計量 g_D に関する長さが無限大の測地線になることが知られている．この線分上に原点から等距離にある点を頂点とする正 $4g$ 角形 (辺は測地線) を考えると．頂点が原点に近づけば，ユークリッド空間の正 $4g$ 角形の相似拡大に近づくので，頂点での内角は $\left(1 - \frac{1}{2g}\right)\pi$ に近づき，また頂点と原点とのリーマン計量から定まる距離が ∞ に発散する場合，これら頂点は単位円にユークリッド距離で近づくので内角は 0 に近づく．また，内角は原点からの距離に関して連続であるので，あるところで丁度 $\pi/2g$ になるのでこれで決まる正 $4g$ 角形の辺を以下の図のように張り合わせると種数 g のコンパクトリーマン面 $M = M_g$ が得られる．



尚，こうしてできるリーマン面は D のリーマン計量を受けついでおりその断面曲率はやはり一定でその値は -1 である．一方，この曲面は 3 次元ユークリッド空間内の曲面としては実現できないことが知られている．上の図の下方の曲面は種数 2 であり，貼り合わせてできたリーマン面とトポロジーは同じであるが，断面曲率は一定ではないのでリーマン多様体としては異なるものである．

■群と商空間 以上は貼り合わせによるリーマン面の構成であるが，実はこの場合を含め，すべての閉リーマン面は「H あるいは D をある群で割った空間」としても実現できることが知られている．「多様体を群で割る」とはどういうことかについて説明する．

まず，群 G についてその定義を述べる．集合 G の上の演算 $\cdot$ とは，G の 2 つの元 (要素ともいう)a, b に対し，ある G の元 ($a \cdot b$ と書かれるがしばしば演算の記号 $\cdot$ は省略され単に ab と書かれる) を対応させる規則である．集合 G とその上の演算 $\cdot$ で，次の 3 条件をみたすようなものの組 $(G, \cdot)$ を群という．ただし，しばしば演算は省略され,$(G, \cdot)$ でなく単に群 G といわれることが多い．ここで 3 条件とは

1. (結合法則の成立)　G の元 a, b, c に対し，$(ab)c = a(bc)$ が成り立つ．
2. (単位元の存在)G の元 e(単位元と呼ばれる) で G の任意の元 a に対し，$ae = ea = a$ を満たすものが存在する．
3. (逆元の存在)G の任意の元 a に対し，それに応じて決まる G のある元 b で $ab = ba = e$ を満たすものが存在する．この b は通常 a^{-1} と書かれ，a の逆元と呼ばれる．

群の例：(1) $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$: 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ とその上の通常の足し算 $+$ は群をなす．この場合，単位元は 0, また逆元 a^{-1} は $-a$ である．$\mathbb{Z}$ の部分集合のうち，偶数全体は同じ演算で群になるが．奇数全体や自然数全体 $\mathbb{N}$ は群にならない．

群の例（2）$G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$:0 でない有理数全体と通常の掛け算 $\cdot$ の組は群になる．この時，単位元は 1, 逆元 $a^{-1} = \frac{1}{a}$(逆数) である．

次に「空間を群で割る」について説明する．

まず「空間 X に群 Γ(ガンマ) が作用する」とは，群 Γ の各元 a に対して空間 X の変換 T_a が対応しており，さらにこの対応が群の演算と両立していることである．ここで変換 T_a とは X の各点 x を別の点 $T_a x$ に移すものであり，またこの対応が群の演算と両立しているとは，G の元 a, b に対し，まず変換 T_b をしてから続けて変換 T_a を行って得られる変換を合成変換 $T_a \circ T_b$ と呼ぶが，この合成変換が Γ の元 ab に対応する変換 T_{ab} と一致することである．

また，X の点 x の Γ による軌道 Γx とは Γ のすべての元 a に対応する変換 T_a による移り先 $T_a x$ 全体の集合として定義する．このとき「X を Γ で割る」操作が定義でき，その結果得られる集合を商空間 X/Γ とよぶ．ただし X/Γ は，Γ による軌道全体のなす集合である．さらに自然な射影 $p : X \to X/\Gamma$ が X の点 x にその軌道 Γx を対応させることにより定義される．

以上，抽象的な議論が続いたが，具体例をみてみよう．

商空間の例 1:$X = \mathbb{R}$，$\Gamma = \mathbb{Z}$ で $\mathbb{Z} \ni n$ に対しその変換 T_n を $T_n x = x + n$ で定義すれば，この作用の軌道 $\mathbb{Z}x = \{x + m | m \in \mathbb{Z}\}$ であるから，閉区間 $[0, 1]$ においては，両端の点 0 と 1 は同じ軌道に属するが，それ以外の点の軌道はすべて異なり，またそれらの軌道全体の和集合は全体の空間 $\mathbb{R}$ と一致するから，商空間 X/Γ は閉区間 $[0, 1]$ の両端の点をくっつけた円周ということになる．

商空間の例 2∶ $X = \mathbb{R}^2, \Gamma = \mathbb{Z}^2 = \{(m, n) | m, n \in \mathbb{Z}\}$ とし, $\mathbb{Z}^2$ の元 (m, n) に対応する変換を $T_{(m,n)}(x, y) = (x + m, y + n)$ で定義すれば，例 1 と同様にして，商空間 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ はトーラス (ドーナツの表面) になることがわかる．さらにリーマン計量も込みの商空間も考えることもできる．$\mathbb{R}^2$ は座標平面と考えられるが，ここには通常のユークリッド距離から決まるユークリッド計量が入っている．この計量の断面曲率 (ガウス曲率) は 0 であり，上の変換はユークリッド距離を変えないのでユークリッド計量を保つ変換である．するとその商空間にも自然にリーマン計量が入るがその断面曲率は 0 であり，回転面として描かれるトーラスとはリーマン多様体としては異なる．この断面曲率が 0 のトーラス (平坦トーラスといわれる) も 3 次元空間内の曲面としては実現できないことが知られている．

商空間の例 3：断面曲率 -1 の閉リーマン面は上で構成した例も含めて，すべて H あるいは D をある群で割った商空間として得られることが知られている．この群は商空間の基本群とよばれるものと同じ群であるが，その作用，すなわちその変換 T_a を具体的に表示するには，それなりの準備が必要でありここでは述べられない．

2.4　素数定理の幾何学版

以上，いろいろ幾何学的準備をしてきたがあと少しで，算術級数定理のの幾何学版の定式化が述べられる．

まず，リーマン面上の閉測地線とは，測地線でかつ閉曲線であるものである．閉曲線が一つあると，その 2 重巻き，つまり，閉曲線とはその内に出発点に戻ってくる曲線であるが一度戻っていた後，もう一度同じ道を回って戻るという曲線もやはり閉曲線で元の閉曲線の 2 重巻きと呼ぶ．さて閉測地線が「素」であるとは，他の閉測地線の何重巻きになっていない場合をいう．ここでは「素閉測地線」を「素数」の幾何学版と考え，その長さが x 以下の素閉測地線の本数を $\pi(x)$ とし．素数の場合の数え上げ関数 $\pi(x)$ の代わりとする．このとき，素数定理の幾何学版は「素測地線定理」と呼ばれるが，これは次の形である．

定理 2.2.

$$\pi(x) \sim \frac{e^{hx}}{hx}$$

ここで h は測地流の位相エントロピー (topological entropy) と呼ばれる正の数である．次の公式が知られている．M の普遍被覆 $\tilde{M}$ の点 p を中心とする半径 r の球体 $B_r(p)$ の体積を $\mathrm{vol}\,(B_r(p))$ とするとき，

$$h = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log \mathrm{vol}\,(B_r(p))$$

が成立する．普遍被覆についてここでは定義は述べないが，リーマン面 H/Γ の場合，その普遍被覆は H あるいは D である．さらに定曲率 -1 のリーマン計量をもつコンパクトリーマン面の場合は $h = 1$ である．尚，素数定理との比較のためには，$T = e^{hx}$ とおけばよい．すると $\frac{e^{hx}}{hx} = \frac{T}{\log T}$ であるので，素数定理と同じ形の関数で近似できることになる．

この定理は，1950 年代にセルバーグおよびヒューバー (Huber) により，定負曲率曲面の場合に調和解析および跡公式を用いて示され，その後，一般の負曲率リーマン計量をもつコンパクトリーマン多様体や，さらにその一般化であるアノソフ流 (Anosov flow) の場合は 1969 年のマルグリス (Malgulis) の学位論文により，力学系の議論を用いて得られ，1980 年代はじめに，さらなる一般化である弱混合的公理 A 流 (weakly mixing Axiom A flow) を持つ多様体についてパリー (Parry)・ポリコット (Pollicott) により示されている．彼らの方法も力学系を用いるものであるが，マルグリスのものが直接的であるのに比べ，記号力学系 (symbolic dynamics) というある種の離散近似と熱力学形式 (thermodynamical formalism) という数理物理の議論によっている．その後，定理の精密化や，非コンパクト多様体についていくつかの結果があるが，現在まで活発な研究が続いている．

素数定理とその幾何学版の違いについて少しコメントすると．素数の場合，リーマン予想は未解決な難問で

あるが，幾何学の場合，ある程度リーマン予想の幾何学版が解かれている場合がある．このことに関連して，元々のリーマン予想に対して，以下のヒルベルト・ポリアの予想 (構想？) が知られている．

「ゼータ関数の零点はある自己共役線形作用素の固有値と関係するであろう」

これ等の用語の定義のためには，もう少し準備が必要なのでここでは述べないがので，興味があれば，調べてください．

この予想は，多くの数学者を魅了し，このような作用素を探す試みもいくつかなされているが，まだ決定版は存在しない．幾何学においては，実際にこのような作用素が存在し，それを用いた解析が可能なため，リーマン予想に関して進展しているわけである．これがセルバーグの研究の基礎にあるといえる．

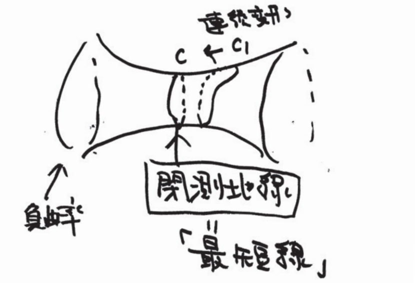
2.5　ディリクレの算術級数定理の幾何学版の定式化

算術級数定理の精密化であるド・ラ・バレ・プサンの定理の設定は以下の通りであった．

ℓ を自然数とし，自然数を ℓ で割った余り $(\mathrm{mod}\ \ell)$ である合同類を対応させる写像 $\Phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ を考え，$\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ の乗法に関する可逆元全体のなす乗法群 $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$ の元 α に対し，$\pi(x, \alpha; \ell)$ を素数 p で $\Phi(p) = \alpha$ を満たし，大きさが x 以下のものの個数を表す．

そこで，幾何学における写像 $\Phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ のアナロジーを考察する．M を負の断面曲率をもつコンパクトなリーマン多様体とする．このとき，「閉測地線」とそれが属する「閉曲線の自由ホモトピー類」と「M の基本群 $\pi_1(M)$ の共役類」の 3 者に 1 対 1 対応がある．ここで「閉曲線の自由ホモトピー類」とは曲線の連続変形により別の閉曲線が得られるが，それら全体の閉曲線のクラスを指す．また基本群とは初めに基点とよばれる点を一つ固定し，その点を通る閉曲線 (ループ) の連続変形で移りあうものなすクラス (基点を固定したホモトピー類) がその元であり，それらの元 α, β に対する演算結果である元 $\alpha\beta$ を以下で定義して得られる群である．α, β に属する閉曲線をそれぞれ a, b とするとき，閉曲線 ab を基点を出発して a に沿って一回りして基点に戻った後，続けて b に沿ってもう一回りして得られる閉曲線とすれば，$\alpha\beta$ は ab を含むホモトピー類である．さらに一般に，群 G の元 a の共役類 $[a]$ とは $[a] = \{gag^{-1} | g \in G\}$ で定義される部分集合である．

負の断面曲率をもつコンパクトなリーマン多様体においては閉曲線の自由ホモトピー類の中で最短閉曲線がただ 1 つ存在し，それが閉測地線である．これは以下の図から想像できるであろう．



自由ホモトピーも，基本群も閉曲線のホモトピーに基づいて定義されたが，基本群の場合は基点を固定したホモトピー類であるので，基点を固定しない自由ホモトピー類とは少しずれが生じその元の共役類が対応することになる．

このことを念頭に置いて次のように問題を定式化する．

有限生成離散群 Γ，その元の共役類 α および全射準同型 $\Phi : \pi_1(M) \to \Gamma$ に対し，

$$\pi(x, \Phi, \alpha) = \sharp\{\mathfrak{p} \mid \Phi([\mathfrak{p}]) \subset \alpha, \ell(\mathfrak{p}) < x\}$$

とおく．ただし，$\mathfrak{p}$ は M の素閉測地線で，$[\mathfrak{p}]$ は対応する $\pi_1(M)$ の共役類を表し，$\ell(\mathfrak{p})$ はその長さを表す．このとき

問題 2.3. $\pi(x, \alpha)$ の $x \to \infty$ での漸近挙動はどのようなものであるか？

について考える．

まず，$\Gamma = \{e\}$(単位元のみからなる群) の場合，$\pi(x, \alpha) = \pi(x)$ であり，素閉測地線定理に他ならない．次に，Γ が有限群の場合は，チェボタレフの密度定理の (直接的な) 幾何学的類似と考えることができ，証明の枠組も，数論の場合のものがそのままの形で適用可能である．以下は足立俊明・砂田およびパリー・ポリコットによる次の結果がある．

定理 2.4. Γ が有限群のとき，

$$\pi(x, \alpha) \sim \frac{\sharp\alpha}{\sharp\Gamma} \frac{e^{hx}}{hx}.$$

次に考察されたのは Γ が無限アーベル群の場合で，この場合，本質的には「与えられた (1 次元) ホモロジー類に属する素閉測地線はどれくらいあるか？」という問題に言い換えられる．これについては足立・砂田の先行研究の後，次の定理がフィリップス (Phillips)・サルナック (Sarnak) により得られた．

定理 2.5. M をコンパクトリーマン面で種数が $g(\geq 2)$ で定負曲率 -1 を持つものとすれば

$$\pi(x, \alpha) \sim \frac{(g-1)^g e^x}{x^{1+g}} \left(1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots\right).$$

この場合 Γ は 1 次元ホモロジー群 $H_1(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ であり，分子にあらわれる定数 $(g-1)^g$ に関係する最も重要な量は M に付随するヤコビトーラス (Jacobi torus)$H^1(M, \mathbb{R})/H^1(M, \mathbb{Z})$ と呼ばれる対象の体積であるが，この場合はその値は 1 である．

この定理の主要部 (漸近展開の第 1 項) については，彼らとは独立に筆者と砂田の共同研究でも結果が得られた．この結果に関する彼らと我々の方法は少し異なり，彼らの方法は証明の舞台装置は少なくて済み，さらに精密な結果も得られるという利点はあるが，一方，我々の方法は一般化が比較的しやすいという特徴がある．その後，一般の負曲率多様体やさらにその一般化である混合アノソフ流をもつリーマン多様体の場合にほぼ同様の結果が，ラリー (Lalley)，ポリコット，勝田・砂田によりこれも独立に得られた．さらに非コンパクト有限体積リーマン面の場合やこれらの精密化である漸近展開や，さらには中心極限定理，大偏差原理についても何人かの数学者により，結果が得られている．

2.6 ハイゼンベルグ拡大

Γ が非可換無限群の場合は一般には難しいと考えられるが，アーベル群の次の段階はべき零群の場合であろうと考えられる．これは次のように説明される．

Γ がアーベル群のとき，全射準同型 $\pi_1(M) \to \Gamma$ は，$\pi_1(M)$ の最大アーベル商群 $\pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ ($[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ は集合 $\{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in \pi_1(M)\}$ で生成される群 (交換子群 (commutator subgroup)) を経由するが，この群はフルヴィッツ (Hurwicz) の定理により，$H_1(M, \mathbb{Z})$ と同型で自然な対象である．上の商群の定義において，$[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ のかわりに 2 重交換子群 $[\pi_1(M), [\pi_1(M), \pi_1(M)]]$ による商群を考えればこれも自然にべき零群があらわれる．ここで次を予想する．

予想 2.6. Γ を有限生成べき零群とし，α を Γ の中心に属する元の共役類とするとき，

$$\pi(x, \alpha) \sim C \frac{e^{hx}}{x^{1+d/2}} \left(1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots\right)$$

が成立する．ここで d は以下で述べる Γ の多項式増大度であり，定数 C はアーベル群の場合と同様な M の幾何であるヤコビトーラスの体積の他に，Γ に関する情報，特に Γ を格子群 (lattice subgroup) として含む単連結べき零リー群 G のあるユニタリ表現に付随する準楕円型作用素 (hypo-elliptic operator)H に関するスペクトルゼータ関数 (spectral zeta function)$\zeta_H(s)$ の $s = d/2$ での値 $\zeta_H(d/2)$ を用いて書き表せる．また定数 $c_1, c_2, \cdots$ についても，幾何学的量で表すことができる．

多項式増大度 d は次で定まる整数である．一般に，有限生成無限群 Γ に対し，その有限生成系 S を一つ固定し，Γ の元 γ に対し，その語の長さ (word length)$w(\gamma)$ を，γ を S の元の積で表したとき，その表示にあらわれる S の元の個数の最小値で定義する．$\omega(r)$ を語の長さが r 以下の Γ の元の個数とする．このとき，次が知られている．有限生成べき零群に対し，ある定数 C_1, C_2 およびある整数 d が存在して，

$$C_1 r^d \le \omega(r) \le C_2 r^d$$

この d を Γ の多項式増大度と呼ぶ．これは有限生成系 S の選び方によらないことが比較的簡単にわかる．(グロモフの定理によれば逆に $\omega(r)$ が上の不等式を満たすとき，Γ は有限群による拡大の違いを除き，べき零群であることが知られている．)

べき零群の例を 2 つあげよう．

例 2.7. 3 次元 (離散) ハイゼンベルグ (Heisenberg) 群 $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z})$:

$$\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z}) = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

であり，それを一様格子 (uniform lattice) として持つハイゼンベルグ・リー (Lie) 群 $\mathrm{Heis}_3(\mathbb{R})$ は，$\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z}$ の定義において，x, y, z は整数であったが，それを実数で置き換えて得られるリー群であり，そのリー環 (Lie algebra)Lie($\mathrm{Heis}_3(\mathbb{R})$) は

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Heis}_3(\mathbb{R})) = \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z} | [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \mathrm{XY} - \mathrm{YX} = \mathrm{Z} \rangle$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で生成される．

べき零リー群 (nilpotent Lie group)N が滑層化されている (stratified) とはそのリー環 Lie(N) にリー括弧積 (Lie bracket)$[\cdot,\cdot]$ と両立する拡大 (dilatation)$\delta_h : \mathrm{Lie(N)} \to \mathrm{Lie(N)}$ を許容することである．3 次元ハイゼンベルグ・リー群はその例であり，この場合拡大 δ_h は,

$$\delta_h(X) = hX, \delta_h(Y) = hY, \delta_h(Z) = [\delta_h(X), \delta_h(Y)] = h^2 Z$$

で与えられる．さらに，このとき，$\mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z})$ の多項式増大度 $d = 1 + 1 + 2 = 4$ をもつ．またこの場合，上記予想における準楕円型作用素は 1 次元調和振動子 (harmonic oscillator)$-\frac{d^2}{du^2} + u^2$ であり，$\zeta_H(d/2) = \zeta_H(2)$ はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の 2 での値 $\zeta(2) = \pi^2/6$ を用いて表すことができる．

例 2.8. エンゲル Engel 群 E_4: 次のリー環 Lie(E_4) を持つべき零リー群 $\mathrm{E}_4(\mathbb{R})$ の一様格子

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{E}_4) = \langle \mathrm{W}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z} | [\mathrm{W}, \mathrm{X}] = \mathrm{Y}, [\mathrm{W}, \mathrm{Y}] = \mathrm{Z} \rangle$$

この場合も滑層化されていて $d = 1 + 1 + 2 + 3 = 7$ である．またこの場合の，上記予想における準楕円型作用素 H は，4 乗振動子 (quartic oscillator)$-\frac{d^2}{du^2} + u^4$ である．

上の予想に関して，Γ が，3 次元ハイゼンベルグ群の場合に，次の結果が得られた．

定理 2.9. M を種数が g で定負曲率 -1 を持つコンパクトリーマン面とし，$\Gamma = \mathrm{Heis}_3(\mathbb{Z})$ で，α を Γ の中心に属する元の共役類とするとき，M および Γ に依存するある正の定数 $C = C(\alpha)$ が存在して，次が成立する．

$$\pi(x, \alpha) \sim C \frac{e^x}{x^3} \left(1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots\right).$$

この場合，主要部の分母の冪は $d = 4$ であるので $1 + d/2 = 1 + 4/2 = 3$ から得られる．また定数 C は予想 2.6 でのあらわれたもので，この場合は例 2.7 で述べた状況であり，具体的に表すことも可能である．

さらに，α を Γ の中心に属する元の共役類という条件を満たさない場合も気になるが，3 次元ハイゼンベルグ群の場合は，その元の共役類を調べれば，アーベル拡大の場合に帰着することがわかる．

命題 2.10. M, Γ を上の定理と同様とし，α を Γ の中心に属さない元の共役類とする．このとき，M，Γ，α に依存するある正の定数 $C = C(\alpha)$ が存在して，次が成立する．

$$\pi(x, \beta) \sim C \frac{e^x}{x^2} \left(1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots\right),$$

この場合，主要部の分母の冪が $d = 2$ であるのは，$1 + 2/2 = 2$ による．また，この場合も定数 C は具体的に計算できる．

注意 2.11. 上の定理および命題に関して，3 次元ハイゼンベルグ群へのその基本群 $\pi_1(M)$ からの全射準同型が存在することは以下のように示される．種数 $g \geq 2$ を持つ定負曲率リーマン面の基本群 $\pi_1(M)$ は

$$\pi_1(M) = \langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots b_g | \prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = e \rangle$$

と表示できる．このとき $\{u, v\}$ の生成する階数 2 の自由群 F_2 とすれば，全射準同型写像 $\Psi : \pi_1(M) \to F_2$ で $\Psi(a_1) = u, \Psi(a_2) = v, \Phi(a_i) = e(\text{単位元}), i = 3, \ldots, g, \Psi(b_j) = e, j = 1, \ldots, g$ を満たすものが存在する．この写像を経由すれば，3 次元ハイゼンベルグ群は $F_2/[F_2[F_2, F_2]]$ と同型であるので，所望の全射準同型が得られた．

これ等の証明は，群の表現論や，作用素の摂動論や，代数トポロジー等が使われるがここでは説明できない．「リーマンと幾何学」を参照されたい．ただし．ハイゼンベルグ群の場合，磁場付き差分作用素のスペクトルが関係し，その様子が以下のホッフスダッターの蝶々 ((Hofstadter's butterfly) と呼ばれる図であることのみ注意しておく．

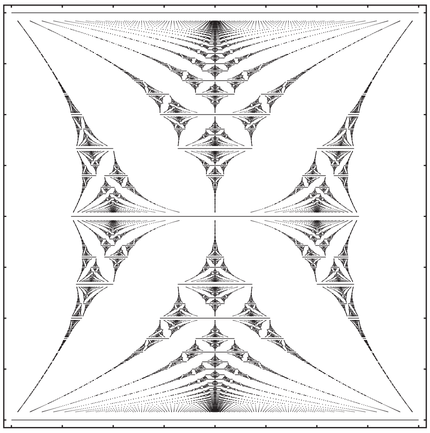


図 1　内藤久資氏提供

2.7　熱核，酔歩 (ランダムウォーク)

最後に，関連事項である熱核および酔歩ついて説明する．前者は，リーマン多様体上の次の熱方程式 (Heat equation，熱伝導方程式ともよばれる) の基本解 (fundamental solution) である．この方程式の初期値問題 (initial value problem)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_M\right) u(t, x) = 0$$
$$u(0, x) = f(x)$$

ここで $f(x)$ は M 上の関数で，初めの熱分布を表し，これが時間とともにどのように変化するかを記述する方程式である．この方程式の基本解 $k_X(t, x, y)$ とは，初期値 $f(x)$ を方程式の解 $u(t, x)$ に対応させる写像を考

えたとき，この写像は積分変換であり，基本解とはその積分核のことである．すなわち，次の表示がある．

$$u(t,x)=\int_M k_X(t,x,y)f(y)d\mathrm{vol}_g(y)$$

換言すると，$k_X(t,x,y)$ はデルタ関数 δ_x を初期値とする初期値問題の (形式的な) 解ということができる．また確率論的に言えば，ブラウン運動 (Brownian motion) の推移確率 (transition probability) でもある．(この離散版が酔歩 (random walk) の推移確率であり，それで表現すると，初めに場所 x にいた酔っ払いが，t 秒後に場所 y にいる確率を表している．)

まず，熱核の存在および一意性が問題になるが，例えば，完備リーマン多様体と呼ばれる自然なクラスの元の場合，熱核の存在と一意性が知られており，複数の証明が与えられている．

熱核の具体的表示は，ユークリッド空間や双曲空間等の対称性の高いリーマン多様体に対しては知られている場合もあるが，一般にはわかっていない．その代わりに，例えば，上下からの評価や短時間漸近挙動 ($t\to 0$ での様子) や長時間漸近挙動 ($t\to\infty$ での様子) 等が問題とされる．特に，コンパクト多様体の Γ 被覆多様体の熱核の長時間挙動に関して，ここでの素閉測地線の数え上げに関する問題とある程度パラレルに議論が可能なことが砂田により指摘された．それは，それまでの研究と一部重複する部分もあるが，熱核の漸近挙動の明示形の導出等に利用された．それについて，ここでは多くは述べられないが，以下のものを例示する．

定理 2.12. $\Gamma=Heis_3(\mathbb{Z})$ に対し，コンパクトリーマン多様体 M の Γ 被覆多様体 X 上の熱核 $k_X(t,x,y)$ は $t\to\infty$ において以下の漸近展開を持つ．

$$k_X(t,x,y)\sim\frac{C}{t^2}\left(1+\frac{c_1}{t}+\frac{c_2}{t^2}+\cdots\right)$$

この結果は，定理 2.9 とほぼ同じ議論で示すことができる．これ以外にも熱核については長時間漸近挙動に関連するものに限っても非常に多くの研究がなされている．さらに，広範な視点からは，熱核は解析学，幾何学以外にも，トポロジー，表現論，数論等多岐にわたる数学と関連があるといえる．それはヨルゲンセン (Jorgensen) とラング (Lang) による論説の題名「どこでも熱核 (The ubiquitous heat kernel)」[2] にも表れている．

参考文献

[1] 砂田 利一, 基本群とラプラシアン—幾何学における数論的方法，紀伊國屋書店

[2] J. Jorgenson and S. Lang, 若山正人 (訳), どこでも熱核, 数学の最先端 21 世紀への挑戦 2 , 136–177, シュプリンガージャパン，2002