和公式と解析数論

権　寧魯　（九州大学数理学研究院）

2021 年 8 月 8 日

概要

“和公式”とは一般の有限数列や無限数列の和を調べる道具である．“数”の性質を解析的手法を用いて研究する，「数論」の一分野である「解析数論」には，オイラーの和公式，アーベルの和公式，ポアソンの和公式，セルバーグの跡公式といった様々な“和公式”が現れる．この公開講座では，これらの和公式を紹介し，“発散級数”の評価，“素数分布”，いくつかの“ゼータ関数”の性質を調べる．そこから得られる数論的応用についても述べる．

- **集合の記号**：$\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ をそれぞれ，複素数，実数，有理数，整数，自然数の集合とする．
- **写像の記号**：A, B を集合とする．A の各元に対して B の元を**ただひとつ**対応させる規則 f があるとき，f を A から B への写像といい，$f\colon A \to B$ とかく．

目次

1 導入

- 収束する級数と発散する級数
- “無限”を数える

(I) k, n を整数で，$k \geq 0$ と $n \geq 1$ を満たすとする．
$S_k(n) := 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ とする．下記の公式が知られている．

$$\begin{aligned}
S_0(n) &= 1 + 1 + \cdots + 1 = n, \\
S_1(n) &= 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1), \\
S_2(n) &= 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \\
S_3(n) &= 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

それでは，以下の数列の和についてはどうだろうか？

$$T_k(n) := 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{n^k}.$$

$S_k(n)$ のような“わかりやすい公式”は知られていないようである．$y = \frac{1}{x^k}$ のグラフを描いて，積分を用いると，$T_k(n)$ を上から評価出来る．

$$T_k(n) \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^k}.$$

- $k > 1$ と仮定する． このとき，

$$T_k(n) \leq 1 + \left[\frac{x^{1-k}}{1-k}\right]_1^n = 1 + \frac{1 - n^{1-k}}{k-1} \leq 1 + \frac{1}{k-1}.$$

よって，極限 $\lim_{n\to\infty} T_k(n)$ は存在する．なぜなら，$T_k(n)$ は単調増加で上に有界であるから．

- $k = 1$ のときを考えよう．

$$\log(n+1) = \int_0^n \frac{dx}{x+1} \leq T_1(n).$$

よって，$\lim_{n\to\infty} T_1(n) = \infty$ となる．なぜなら，$\lim_{n\to\infty} \log(n+1) \to \infty$ となるから．

下記の問題を考えてみよう（ナイーブな形）．:

問題 1.1. 1. $k \geq 2$ とする．$T_k := \lim_{n\to\infty} T_k(n)$ の正確な値が計算出来るだろうか？

2. $\lim_{n\to\infty} T_1(n) = \infty$，下記の級数が発散することがわかっている．

$$\lim_{n\to\infty} S_0(n) = \lim_{n\to\infty} S_1(n) = \lim_{n\to\infty} S_2(n) = \cdots = \lim_{n\to\infty} S_k(n) = \infty.$$

これらの発散級数を“計算”出来るか？（これらの発散級数に何か意味のある値を対応させられるだろうか？）

- 上記の問題は，リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の特殊値を考察することに帰着される．

(II)　素数とゼータ関数

定義 1.2 (素数)**.** 整数 $n > 1$ の正の約数が，1 と n に限るとき，n を素数という．

例. $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, \ldots$

定理 1.3 (Euclid 3rd Century B.C.)**.** 素数は無数に存在する．

定理 1.4 (Euler 1737)**.**

$$\sum_p \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} + \cdots = \infty.$$

ここで，和は素数全体に渡る．

Euclid の定理は，Euler の定理から導けることに注意する．($\because$ 有限和は常に収束！)

- 大雑把に言うと，“素数の個数は平方数の個数より多い”と言える，なぜなら $T_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ が成り立つから．

定義 1.5 ($\pi(x)$)**.** 実数 $x \geq 2$ に対して，$2 \leq p \leq x$ をみたす素数 p の個数を $\pi(x)$ とおく．

例. $\pi(10) = 4$, $\pi(10^2) = 25$, $\pi(10^3) = 168$, $\pi(10^4) = 1229$, $\pi(10^5) = 9592, \ldots$

定理 1.6 (素数定理， Hadamard 1894 and de la Vallée Poussin 1896)**.** x を正の実数とし，$\pi(x)$ を x を超えない素数の個数とする．このとき，以下が成り立つ．

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} \quad (x \to \infty).$$

ここで，$f(x) \sim g(x)$ は $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$ を意味する．

• 上記素数定理は，リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の非零領域を調べることにより，証明された.

定義 1.7 (リーマンゼータ関数). $\mathrm{Re}(s) > 1$ を満たす複素数 $s \in \mathbb{C}$ に対して， 下記で定義する.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

複素数 $s \in \mathbb{C}$ に対して，$\sigma := \mathrm{Re}(s)$ と $t := \mathrm{Im}(s)$ とおく． このとき，$s = \sigma + it$ となる.（$\sigma, t \in \mathbb{R}$.）$\theta \in \mathbb{R}$ に対して，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より，

$$n^{-s} = e^{-s\log n} = e^{-\sigma\log n}e^{-it\log n} = n^{-\sigma}\bigl(\cos(t\log n) - i\sin(t\log n)\bigr).$$

よって，$|n^{-s}| = n^{-\sigma}$ であり，（複素数 $z = x + iy \in \mathbb{C}$ の絶対値 $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ である.）下記の不等式を得る.

$$|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}.$$

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$ は，固定された $\sigma_0 > 1$ 以上の全ての $\sigma \in \mathbb{R}$ に対して，一様収束する．上記級数は $\zeta(s)$ の優級数なので，$\zeta(s)$ は領域 $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$ における正則関数を表す.

• あとで $\zeta(s)$ が，$\mathbb{C}$ 全体に有理型関数（極を除いて正則）として解析接続されることを示す.

2　複素解析入門

解析数論における主要な道具は“複素解析”である．複素解析の基礎について紹介する.（教科書 [4]，[8] 等を参照してください.）

• $D \subset \mathbb{C}$ を領域（連結な開集合）とする．[4] の p.48 参照.

定義 2.1 (正則関数). $f\colon D \to \mathbb{C}$ とする．D の全ての点 z において，f が複素微分可能なとき，f は D 上正則であるという.（$f'(z) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ が存在するという意味．$h \in \mathbb{C}$ に注意.）

定理 2.2 (正則ならば複素解析的). $f\colon D \to \mathbb{C}$ を D 上の正則関数とする．このとき，以下が成り立つ.

1. f は何回でも複素微分可能で，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f^{(n)}$ は D 上正則である．
2. すべての $a \in D$ に対して，f は $z=a$ で複素解析的である，つまり，f は $z=a$ のある近傍においてテイラー展開できる*:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

$D_a(R) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z-a| < R\}$. $(a \in \mathbb{C},\, R > 0)$ とおく．

定義 2.3 (孤立特異点)**.** f を $D_a(R)$ 上の正則関数とする．$f(a)$ が定義されないか，$f'(a)$ が存在しないとき，$z=a$ は f の孤立特異点であるという．

定理 2.4 (ローラン展開)**.** f を $D_a(R)$ 上の正則関数とする．このとき，f はある円環領域において下記のようなローラン展開をもつ．

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

定義 2.5 (主要部)**.** $f\colon D_a(R) \to \mathbb{C}$ を正則関数とし，$z=a$ を f の孤立特異点とする．

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n$$

を，f の $z=a$ におけるローラン展開の主要部という．

定義 2.6. $f\colon D_a(R) \to \mathbb{C}$ を正則関数とし，$z=a$ を f の孤立特異点とする．

1. f の $z=a$ における主要部が 0 となるとき，$z=a$ を除去可能な特異点という．
2. f の $z=a$ における主要部が有限和となるとき，$z=a$ を極という．
3. f の $z=a$ における主要部が無限和となるとき，$z=a$ を真性特異点という．

定義 2.7 (整関数)**.** 複素平面全体で正則な複素関数を整関数という．

- $e^z := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\sin z := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ と $\cos z := \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ は整関数である．

定義 2.8 (解析接続)**.** $D_1 \subset D_2 \subset \mathbb{C}$ を二つの領域とし，$f\colon D_1 \to \mathbb{C}$, $g\colon D_2 \to \mathbb{C}$ を複素解析的な関数とする．g の D_1 への制限が，f と一致するとき，g を f の D_2 への解析接続という．

3 オイラーの和公式

“オイラーの和公式 ”（以下，ESF と略記）と呼ばれる下記の和公式を考える．ESF は $\zeta(s)$ の解析接続を導く際にも用いられる．[9] に従って，ESF とその応用をいくつか紹介する．

定義 3.1 (ガウス記号)**.** 実数 x に対して，$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ で定義する．

命題 3.2 (オイラーの和公式)**.** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ とする．$x > 0$ とする．区間 $[0, x]$ において，f が連続な導関数 f' をもつならば，下記が成り立つ．

$$\begin{aligned}\sum_{0<n\leq x} f(n) &= \left(\sum_{n\leq x} 1\right) f(x) - \int_1^x \left(\sum_{n\leq t} 1\right) f'(t)\,dt \\ &= [x]\,f(x) - \int_1^x [t]\,f'(t)\,dt.\end{aligned}$$

証明. 以下のように積分区間を分割して計算する．

$$\begin{aligned}&\int_1^x \left(\sum_{n\leq t} 1\right) f'(t)\,dt \\ &= \sum_{2\leq m\leq [x]} \int_{m-1}^m (m-1) f'(t)\,dt + \int_{[x]}^x [x] f'(t)\,dt \\ &= \sum_{2\leq m\leq [x]} (m-1)\Big[f(t)\Big]_{m-1}^m + [x]\Big[f(t)\Big]_{[x]}^x \\ &= \Big(f(2) - f(1)\Big) + 2\Big(f(3) - f(2)\Big) + 3\Big(f(4) - f(3)\Big) \\ &\quad + \cdots + ([x]-1)\Big\{f([x]) - f([x]-1)\Big\} + [x]\Big\{f(x) - f([x])\Big\} \\ &= -f(1) - f(2) - f(3) - \cdots - f([x]-1) - f([x]) + [x]f(x) \\ &= -\sum_{n\leq x} f(n) + \left(\sum_{n\leq x} 1\right) f(x).\end{aligned}$$

□

◎ ESF の応用 1

高校で下記の極限が発散する事実を習ったと思う．

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \infty.$$

定義 3.3 (ランダウの（ビッグオー）記号)．$f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ とする．$x_0 > 0$ と $C > 0$ が存在して，$x > x_0$ならば $|f(x)| \le C|g(x)|$ となるとき，

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to \infty)$$

とかく．

定理 3.4.

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to \infty).$$

ここで，γ はオイラーの定数で，$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right)$ で与えられる．

証明． ESF で，$f(t) = 1/t$ とおくと，下記を得る．

$$\begin{aligned}\sum_{n \le x} \frac{1}{n} &= \frac{[x]}{x} + \int_1^x \frac{[t]}{t^2}\,dt \\ &= \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{t-[t]}{t^2}\,dt + 1 - \frac{x-[x]}{x} \\ &= \log x + 1 - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}\,dt + \int_x^\infty \frac{t-[t]}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

広義積分 $\int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}\,dt$ は存在する．なぜなら，$\int_1^\infty t^{-2}dt = 1$ で抑えられるから．また，

$$0 \le \int_x^\infty \frac{t-[t]}{t^2}\,dt \le \int_x^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}.$$

よって，

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{n} = \log x + 1 - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

最後に，計算により，

$$
\begin{aligned}
C &:= 1 - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}\,dt = 1 - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{t-[t]}{t^2}\,dt \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\left(\frac{1}{t}-\frac{k-1}{t^2}\right)dt \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left[\log t + \frac{k-1}{t}\right]_{k-1}^{k} \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left\{\log k - \log(k-1) - \frac{1}{k}\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right).
\end{aligned}
$$

□

◎ ESF の応用 2 ：素数の分布に関する，ある漸近公式.

定義 3.5 (フォン・マンゴルト関数). 整数 $n \geq 1$ に対して，下記で定義する.

$$
\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & n = p^m \text{ とかけるとき，ここで，} p \text{ は素数で } m \geq 1 \text{ は整数.} \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases} \tag{3.1}
$$

例：$\Lambda(1) = 0$, $\Lambda(2) = \log 2$, $\Lambda(3) = \log 3$, $\Lambda(4) = \log 2$, $\Lambda(5) = \log 5$, $\Lambda(6) = 0, \ldots$.

- 素数定理は下記の漸近公式と同値であることが知られている.

$$
\sum_{n\leq x}\Lambda(n) \sim x \quad (x\to\infty).
$$

素数定理の代わりに，導出が比較的易しいいくつかの素数の分布に関する漸近公式を紹介する.

定理 3.6.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] &= x\log x + O(x), \\
\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n} &= \log x + O(1), \\
\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p} &= \log x + O(1).
\end{aligned}
$$

下記の補題を示すことから始めよう．

補題 3.7. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ を数論的関数とする．このとき，下記が成り立つ．

$$\sum_{n\le x}\sum_{d|n} f(d) = \sum_{n\le x} f(n)\left[\frac{x}{n}\right].$$

証明.

$$\sum_{n\le x}\sum_{d|n} f(d) = \sum_{md\le x} f(d) = \sum_{d\le x}\sum_{m\le x/d} f(d) = \sum_{d\le x} f(d)\left[\frac{x}{d}\right].$$

□

命題 3.8.

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] = x\log x + O(x) \quad (x\to\infty). \tag{3.2}$$

証明.

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n\le x}\sum_{d|n}\Lambda(d) = \sum_{n\le x}\log n.$$

ここで，下記を用いた．

$$\sum_{d|n}\Lambda(d) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{a_k}\Lambda(p_k^m) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{m=1}^{a_k}\log p_k = \log n,$$

ただし，$n=\prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k}$ と素因数分解した．ESF において，$f(t)=\log t$ とおくと，下記を得る．

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x}\log n &= [x]\log x - \int_1^x \frac{[t]}{t}\,dt \\
&= [x]\log x + \int_1^x \frac{t-[t]}{t}\,dt - (x-1) \\
&= x\log x - x + 1 + \int_1^x \frac{t-[t]}{t}\,dt + ([x]-x)\log x \\
&= x\log x - x + 1 + \int_1^x \frac{t-[t]}{t}\,dt + O(\log x) \\
&= x\log x - x + O(\log x) = x\log x + O(x).
\end{aligned}$$

これで，証明された． □

命題 3.9.

$$\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1). \tag{3.3}$$

証明.

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] &= \sum_{n\le x}\Lambda(n)\left\{\frac{x}{n}+O(1)\right\}\\ &= x\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} + O(\sum_{n\le x}\Lambda(n))\\ &= x\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} + O(x).\end{aligned}$$

ここで，$\sum_{n\le x}\Lambda(n) = O(x)$ を用いた．(3.2) より，下記を得る．

$$\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1).$$

□

命題 3.10.

$$\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p} = \log x + O(1). \tag{3.4}$$

証明. n が素数べきでないときは，$\Lambda(n) = 0$ なので，

$$\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{p}\sum_{p^m\le x}\frac{\Lambda(p^m)}{p^m}.$$

最後の和を書き直すと，

$$\sum_{p\le x}\sum_{m=1}^{[\frac{\log x}{\log p}]}\frac{\log p}{p^m} = \sum_{p\le x}\frac{\log p}{p} + \sum_{p\le x}\sum_{m=2}^{[\frac{\log x}{\log p}]}\frac{\log p}{p^m}.$$

右辺の 2 番目の和が $O(x)$ であることを言う．実際，

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x}\sum_{m=2}^{[\frac{\log x}{\log p}]}\frac{\log p}{p^m} &\le \sum_{p\le x}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\log p}{p^m} = \sum_{p\le x}\log p\sum_{m=2}^{\infty}p^{-m}\\ &= \sum_{p\le x}\log p\cdot\frac{p^{-2}}{1-p^{-1}} = \sum_{p\le x}\frac{\log p}{p(p-1)}\\ &\le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n(n-1)} = O(1),\end{aligned}$$

なぜなら，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}<\infty,\quad \frac{\log(n+1)}{n^2}\Big/\frac{1}{n^{3/2}}=\frac{\log(n+1)}{n^{1/2}}\to 0\ (n\to\infty),$$

よって

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n(n-1)}\leq\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{(n-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n+1)}{n^2}<\infty.$$

（注意： $\exists N\in\mathbb{N}$ such that $n\geq N$ ならば $\log(n+1)/n^2\leq n^{-3/2}$ が言える．）

以上より，証明された．

$$\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{n}=\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}+O(1)=\log x+O(1).$$

□

◎ 応用３： $\displaystyle\sum_{p}\frac{1}{p}=\log\log\infty$ （Euler 1737）

ESF の一つの一般化である“アーベルの和公式”を用いる．（以下，ASF と略記する．）

定理 3.11 (アーベルの和公式)**.** 任意の数論的関数 $a(n)$ に対して，（数論的関数とは $\mathbb{N}$ 上の関数のこと）

$$A(x):=\sum_{n\leq x}a(n),$$

とおく．ここで，$x<1$ ならば，$A(x)=0$ とする．$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が連続な導関数を区間 $[y,x]$ 上持つと仮定する，ただし，$0<y<x$ とする．このとき，以下が成り立つ．

$$\sum_{y<n\leq x}a(n)f(n)=A(x)f(x)-A(y)f(y)-\int_y^x A(t)f'(t)\,dt. \tag{3.5}$$

証明. 積分区間を以下のように分割する．

$$\int_y^x=\int_{[x]}^x+\int_{[x]-1}^{[x]}+\cdots+\int_y^{[y]+1}.$$

あとは，ESF の証明と同様である． □

• すべての $n\geq 1$ に対して，$a(n)=1$ とおけば，$A(x)=[x]$ となって ASF から ESF が導かれる．

定理 3.12.

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\log(\log x)+C+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\quad (x\to\infty).$$

和は x 以下の素数全体に渡る．ここで，C はある定数である．

証明.

$$P(x):=\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}.$$

とおく．命題 3.10 において，$P(x)=\log x+O(1)$ を既に示した．

$$a(n):=\begin{cases}1 & n\text{ が素数のとき}\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

とおく．このとき，

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\sum_{n\le x}\frac{a(n)}{n},\quad P(x)=\sum_{n\le x}\frac{a(n)}{n}\log n$$

となり，ASF において，$f(t)=1/\log t$ とおけば，

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\sum_{n\le x}\frac{a(n)}{n}\log n\cdot f(n)=\frac{P(x)}{\log x}+\int_2^x\frac{P(x)}{t\log^2 t}\,dt$$

が成り立つ．ここで，$P(t)=0$ for $t<2$ を用いた．$P(x)=\log x+O(1)$ であったから，さらに

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x}\frac{1}{p}&=\frac{\log x+O(1)}{\log x}+\int_2^x\frac{\log t+R(t)}{t\log^2 t}\,dt\\ &=1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)+\int_2^x\frac{dt}{t\log t}+\int_2^x\frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt\end{aligned}$$

となる．ここで，$R(t)=O(1)$ である．さて，

$$\int_2^x\frac{dt}{t\log t}=\log\log x-\log\log 2$$

と

$$\int_2^x\frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt=\int_\infty^2\frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt-\int_\infty^x\frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt,$$

であり，$R(t)=O(1)$ より，広義定積分の収束がわかる．また，

$$\int_\infty^x\frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt=O\left(\int_x^\infty\frac{dt}{t\log^2 t}\right)=O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

である．以上より，

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\log\log x+C+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

が成り立ち，

$$C=1-\log\log 2+\int_2^\infty \frac{R(t)}{t\log^2 t}\,dt$$

である． □

◎ 応用 4 ：$\zeta(s)$ の $\mathrm{Re}(s)>0$ への解析接続
$\sigma=\mathrm{Re}(s)>1$ とし，$f(x)=x^{-s}$ とおく．この $f(x)$ に対して，オイラーの和公式を使う．

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}n^{-s}&=[x]x^{-s}-\int_1^x [t](-s)t^{-s-1}\,dt\\&=[x]x^{-s}+s\int_1^x\Big\{([t]-t)+t\Big\}t^{-s-1}\,dt\\&=[x]x^{-s}+s\int_1^x([t]-t)t^{-s-1}\,dt+s\int_1^x t^{-s}\,dt\\&=[x]x^{-s}+s\int_1^x([t]-t)t^{-s-1}\,dt+\frac{s}{1-s}(x^{1-s}-1).\end{aligned}$$

ここで，

- $\big|[x]x^{-s}\big|\le [x]x^{-\sigma}\le x^{1-\sigma}=x^{-(\sigma-1)}\to 0\ (x\to\infty)$
- $\big|x^{1-s}\big|=x^{1-\sigma}\to 0\ (x\to\infty)$

に注意すると，$\mathrm{Re}(s)>1$ に対する $\zeta(s)$ の下記の表示を得る．

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}=\frac{s}{s-1}+s\int_1^\infty\big([t]-t\big)t^{-s-1}\,dt. \tag{3.6}$$

さて，(3.6) の右辺の積分が $\{s\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(s)>0\}$ に属する s に対して，収束することをみよう．実際，$\sigma>0$ のとき，この積分は下記のように上から評価される．

$$\int_1^\infty\Big|\big([t]-t\big)t^{-s-1}\Big|\,dt\le\int_1^\infty t^{-\sigma-1}\,dt=\Big[-\frac{1}{\sigma}t^{-\sigma}\Big]_1^\infty=\frac{1}{\sigma}<\infty.$$

よって，(3.6) の右辺が，$s\in\{s\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(s)>0,\ s\ne 1\}$ に対して，意味をもつことが証明された．この式は，$\zeta(s)$ が $\mathrm{Re}(s)>0$ に解析接続されて，$s=1$ において一位の極を

もつことが示された．極 $s=1$ における留数を計算すると，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) \\
&= \lim_{s\to 1}(s-1)s\int_1^\infty \big([t]-t\big)t^{-s-1}\,dt + \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{s}{s-1} \\
&= 0+1=1
\end{aligned}
$$

となる．

命題 3.13. 元々 $\mathrm{Re}(s)>1$ において定義されていたリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ は，$\mathrm{Re}(s)>0$ まで解析接続される．$s=1$ での一位の極（留数 1 ）を除いて，$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ において正則となる．

- “ポアソン和公式” を用いて，$\zeta(s)$ が $\mathbb{C}$ 全体に解析接続できることをあとで証明する．

4　無限積

命題 4.1. $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty u_n$ が絶対収束すれば，$\displaystyle\prod_{n=1}^\infty (1+u_n)$ も収束する．

証明. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ より，$N\in\mathbb{N}$ が存在して，$n\geq N$ ならば $u_n\leq 1/2$ となる．$|u|<1/2$ のとき，

$$
|\log(1+u)| \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{|u|^n}{n} \leq \sum_{n=1}^\infty |u|^n = \frac{|u|}{1-|u|} \leq 2|u|
$$

となる．よって $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty u_n$ が絶対収束すれば，$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \log(1+u_n)$ も絶対収束する．　□

- $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \log(1+u_n)$ が絶対収束するとき，「無限積 $\displaystyle\prod_{n=1}^\infty(1+u_n)$ は絶対収束する」という．

系 4.2. $D\subset\mathbb{C}$ を領域，$\{u_n(z)\}$ を D 上の正則関数列とする．D のすべてのコンパクト部分集合上で，$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty u_n(z)$ が一様絶対収束するならば，$\displaystyle\prod_{n=1}^\infty(1+u_n(z))$ も D のすべてのコンパクト部分集合上で一様絶対収束し，D 上の正則関数を定義する．

- $A\subset\mathbb{C}$ がコンパクト $\Longleftrightarrow$ A が有界閉集合　（[4] の p.39 参照.）
- 一様収束については，[4] の p.44 参照.

命題 4.3. $\{p_n\}$ を素数全体からなる数列とする．（$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$）
$\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$ なる $s \in \mathbb{C}$ に対して，無限積

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - p_n^{-s})$$

は，$\mathrm{Re}(s) > 1$ 内のすべてのコンパクト部分集合上で一様絶対収束し，$\mathrm{Re}(s) > 1$ 上の正則関数を定義する．

証明. $p_n^{-s} = \exp(-s \log p_n)$ は整関数である．$\mathrm{Re}(s) \geq \sigma_0 > 1$ に対して，$\sigma_0 > 1$ より，以下が成り立つ．

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-\sigma_0} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma_0} < \infty.$$

系 4.2 より，$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1 - p_n^{-s})$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ 内のすべてのコンパクト部分集合上で一様絶対収束し，$\mathrm{Re}(s) > 1$ 上の正則関数を定義する． □

定理 4.4 (オイラー積)**.** $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$ に対して，以下が成り立つ．

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:prime} (1 - p^{-s})^{-1}$$

証明. 以下の等式に注意する．

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{n:\mathrm{odd}} \frac{1}{n^s},$$

$$\zeta(s)(1 - 2^{-s})(1 - 3^{-s}) = \sum_{n:\mathrm{odd}} \frac{1}{n^s} - \sum_{n:\mathrm{odd}} \frac{1}{(3n)^s} = \sum_{n:\mathrm{odd}, 3 \nmid n} \frac{1}{n^s}.$$

同様に，

$$\zeta(s) \prod_{k=1}^{N}(1 - p_k^{-s}) = \sum_{p_k \nmid n, k=1,\dots,N} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{{p_{N+1}}^s} + \dots$$

ゆえに，証明された．

$$\zeta(s) \prod_{p:\mathrm{prime}} (1 - p^{-s}) = 1.$$

□

命題 4.5. $f(z) := \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ は，$\mathbb{C} - \mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \mathbb{Z}\}$ のすべてのコンパクト部分集合上で一様絶対収束し，

$$f(z) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$$

となる．

証明. $R > 0$ を固定し，自然数 N を $N \geq 2R$ を満たすように取る．$|z| \leq R$ と $n \geq N$ に対して，

$$\frac{1}{|z-n|^2} \leq \frac{1}{n^2}\frac{1}{|1-z/n|^2} \leq \frac{1}{n^2}\frac{1}{(1-|z/n|)^2} \leq \frac{1}{4}\frac{1}{n^2}$$

が成り立つ．なぜなら，$|z/n| \leq R/n \leq R/2R \leq 1/2$ だから．よって，下記が成り立つ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z-n|^2} \leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{|z-n|^2} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{4}{n^2}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束するので，$f(z)$ は，$\mathbb{C} - \mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \mathbb{Z}\}$ のすべてのコンパクト部分集合上で一様絶対収束し，有理型関数を定義する．初めに，以下が確認できる．

1. $f(z+1) = f(z)$.
2. f は $z = n$ $(n \in \mathbb{Z})$ において，位数 2 の極をもち，その主要部は $1/(z-n)^2$.
3. $\displaystyle\lim_{|y|\to\infty} \sup_{|x|\leq 1/2} f(z) = 0$.

次に，$g(z) := \left(\dfrac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$ とおく．すると，$g(z)$ も上記の 1,2 と 3 を満たすことが確認できる．最後に，$F(z) := f(z) - g(z)$ とおく．$F(z)$ は有界な整関数となる．Liouville の定理より，$F(z)$ は定数関数となる．$\lim_{y\to\infty} F(z) = 0$ より，$F(z) \equiv 0$ となる．　□

系 4.6.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

証明. 命題 4.5 において，$z = 1/2$ とおく．左辺は

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1/2-n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2}$$

となり，右辺は $(\pi/(\sin \pi/2))^2 = \pi^2$ となる．よって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

を得る．以下を用いれば，

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + \frac{\pi^2}{8},$$

$$\zeta(2) = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

を得る． □

系 4.7. $h(z) := \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\Big)$ は，$\mathbb{C} - \mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \mathbb{Z}\}$ のすべてのコンパクト部分集合上で一様絶対収束し，$h(z) = \pi\cot(\pi z)$ となる．（$\cot z = 1/(\tan z)$）

証明． 命題 4.5 の証明と同様に，$h(z)$ は $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ のすべてのコンパクト部分集合上で一様絶対収束し，有理型関数を定義することが示せる．$h(z)$ を微分して，下記を得る．

$$\begin{aligned} h'(z) &= -\frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2}\Big) \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = -\Big(\frac{\pi}{\sin \pi z}\Big)^2 \\ &= \frac{d}{dz}(\pi \cot \pi z). \end{aligned}$$

よって，ある定数 C を用いて，$h(z) = \pi\cot(\pi z) + C$ とかける．$h(-z) = -h(z)$ と $\cot(-z) = -\cot(z)$ より，$C = -C$ となるので，$C = 0$． □

定理 4.8.

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big).$$

証明． $R > 0$ とし，$|z| \leq R$ とする．このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\frac{z^2}{n^2}\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^2}{n^2} = R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

ゆえに，一様絶対収束する．よって， 無限積 $f(z) := \pi z \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big)$ は，複素平面全体で正則関数を定義する．$f(z)$ の対数微分を取れば，下記を得る．

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cot \pi z \\ &= \frac{(\sin \pi z)'}{\sin \pi z}. \end{aligned}$$

（ここで，系 4.7 を使った）．よって，ある定数 C を用いて，$f(z) = C \sin \pi z$ とかける．$\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{\pi z} = 1$ より，$C = 1$ となる．□

系 4.9.

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

証明. 定理 4.8 より，

$$\begin{aligned}\frac{\sin \pi z}{\pi z} &= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \\ &= 1 - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) z^2 + \left(\sum_{n<k} \frac{1}{n^2 k^2}\right) z^4 - \dots \end{aligned} \tag{4.1}$$

となる．テイラー展開を考えると，

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\pi z)^{2k} = 1 - \frac{\pi^2}{3!} z^2 + \frac{\pi^4}{5!} z^4 - \dots \tag{4.2}$$

となる．二つの表示式の z^2 の係数を比較すると，下記を得る．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3!} = \frac{\pi^2}{6}.$$

二つの表示式の z^4 の係数を比較すると，

$$\sum_{n<k} \frac{1}{n^2 k^2} = \frac{\pi^4}{5!} = \frac{\pi^4}{120}$$

を得るが，次式に注意すると，

$$2 \sum_{n<k} \frac{1}{n^2 k^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^4}{36},$$

となって，下記を得る．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{36} - 2\frac{\pi^4}{120} = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

5 ガンマ関数

以下の議論では，ガンマ関数 $\Gamma(s)$ の基本的な性質を必要とする．必要な性質をここでまとめておく．証明は大抵の「複素解析のテキスト」に載っている．例えば，[4]，[8] 等を参照せよ．

定義 5.1 (ガンマ関数)**.** $\mathrm{Re}(s) > 0$ に対して，以下で定義する．

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-t} t^{s-1}\, dt. \tag{5.1}$$

定理 5.2. $\Gamma(s)$ は複素平面全体に解析接続されて，$n \in \mathbb{N}$ に対して，$\Gamma(n) = (n-1)!$ となり，以下の点で一位の極を持つ以外は正則となる．

$$s = 0,\ -1,\ -2,\ -3, \dots$$

また，$s = -n$ での留数は $(-1)^n/n!$ となる．以下の表示

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s\, n!}{s(s+1)(s+2)\dots(s+n)} \quad \textit{for } s \neq 0,\ -1,\ -2, \dots$$

と積公式

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}} \quad \textit{for all } s \in \mathbb{C} \tag{5.2}$$

を持つ．ここで，γ はオイラーの定数である．この無限積はすべての s に対して収束するので，$\Gamma(s)$ は決して零にならない．ガンマ関数は二つの関数等式を満たす．

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad \textit{for all } s. \tag{5.3}$$

すべての s と $m \geq 1$ に対して，乗法公式 *(multiplication formula)* が成り立つ．

$$\Gamma(s)\,\Gamma\left(s + \frac{1}{m}\right) \dots \Gamma\left(s + \frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2} - ms} \Gamma(ms). \tag{5.4}$$

系 5.3.

$$\Gamma'(1) = -\gamma.$$

$x > 0$ に対して，

$$\frac{d^2}{dx^2} \log \Gamma(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+x)^2}.$$

証明. $\Gamma(x)$ の積公式の両辺の対数微分をとれば，

$$-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \gamma + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}} - \frac{1}{n}\right)$$

となる．よって，

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right)$$

が得られる．$x = 1$ とすれば，$\Gamma'(1) = -\gamma$ が得られる．一方，x に関して微分すれば，下記を得る．

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2}.$$

□

6　ポアソン和公式と $\zeta(s)$ の関数等式

記号

$C(\mathbb{R}) := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, 連続\}$.

$L^1(\mathbb{R}) := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, 可測 \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty\}$.

$\hat{f}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}\,dx$ ：f のフーリエ変換．$(f \in L^1(\mathbb{R}))$

定理 6.1 (ポアソン和公式)**.** $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ とする．$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ が $\mathbb{R}$ のすべてのコンパクト部分集合で一様絶対収束し，$\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)$ が絶対収束すると仮定する．このとき，次の等式が成り立つ．

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m).$$

証明. $F(x) := \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ とおく．仮定より，$F(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数となる．$F(x+1) = F(x)$ より，$F(x)$ はフーリエ級数でかける．

$$F(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{2\pi imx}.$$

（$F \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ と $\{e^{2\pi imx} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ が，$L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ の完全正規直交系になることに注意せ

よ.）フーリエ係数 a_m を計算すると，下記を得る.

$$
\begin{aligned}
a_m &= \int_0^1 F(x)e^{-2\pi imx}\,dx = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)e^{-2\pi imx}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi imx}\,dx = \hat{f}(m).
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(m)e^{2\pi imx}\right| = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(m)| < \infty
$$

より，このフーリエ級数は $\mathbb{R}$ 上の連続関数となる．よって，$\mathbb{R}$ 上の x の連続関数としての下記の等式を得る.

$$
\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{f}(m)e^{2\pi imx}.
$$

上記の式で，$x=0$ とすれば証明される. □

• $t>0$ を固定し，$f(x)=e^{-\pi tx^2}$ を考える.（この $f(x)$ は定理 6.1 の仮定を満たす.）このとき，フーリエ変換を計算すると

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi tx^2}e^{-2\pi ixy}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t(x+iy/t)^2}e^{-\pi y^2/t}\,dx \\
&= e^{-\pi y^2/t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi tx^2}\,dx = e^{-\pi y^2/t}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\pi y^2}{t}}.
\end{aligned}
$$

定理 6.2.

$$
\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi m^2}{t}}.
$$

$\varphi(t) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$ とおく．次の系を得る.

系 6.3.

$$
2\varphi(t)+1 = \frac{1}{\sqrt{t}}\Big(2\varphi\Big(\frac{1}{t}\Big)+1\Big).
$$

上の系を用いて，$\zeta(s)$ の関数等式を証明する.

先ず，$\mathrm{Re}(s)>0$ のときの以下のガンマ関数の積分表示を思い出す：

$$
\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{s/2-1}\,dx.
$$

$x = \pi n^2 t$ とおくと，

$$\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big) = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t}(\pi n^2 t)^{s/2}\,\frac{dt}{t},$$

つまり

$$\pi^{-s/2} n^{-s} \Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big) = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2}\,\frac{dt}{t}.$$

$\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき，上の式で $n = 1$ から ∞ まで足すと，

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2}\,\frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \varphi(t)\, t^{s/2}\,\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

• $\xi(s) := \pi^{-s/2}\Gamma\Big(\dfrac{s}{2}\Big)\zeta(s)$ とおく: 完備リーマンゼータ関数.
積分 $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ と分割すると:

$$\xi(s) = \int_1^\infty \varphi(t)\, t^{s/2}\,\frac{dt}{t} + \int_0^1 \varphi(t)\, t^{s/2}\,\frac{dt}{t} =: \xi_1(s) + \xi_2(s).$$

$t = 1/y$ とおいて，$\xi_2(s)$ を変形すると，

$$\xi_2(s) = \int_\infty^1 \varphi(1/y)\, y^{1-s/2}(-\frac{1}{y^2})\,dy = \int_1^\infty \varphi(1/y)\, y^{-1-s/2}\,dy.$$

$\varphi(t)$ についての系 6.3 を使う．下記の式：

$$\varphi(1/t) = t^{\frac{1}{2}}\varphi(t) + \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$$

を $\xi_2(s)$ に代入すると，

$$\begin{aligned}\xi_2(s) &= \int_1^\infty \varphi(t)\, t^{\frac{1-s}{2}}\,\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_1^\infty \Big(t^{\frac{1-s}{2}} - t^{-\frac{s}{2}}\Big)\frac{dt}{t} \\ &= \int_1^\infty \varphi(t)\, t^{\frac{1-s}{2}}\,\frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{1-s}{2}}}{\frac{1-s}{2}} - \frac{t^{-\frac{s}{2}}}{-\frac{s}{2}}\right]_1^\infty \\ &= \int_1^\infty \varphi(t)\, t^{\frac{1-s}{2}}\,\frac{dt}{t} - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}.\end{aligned}$$

（最後の等式で，$\mathrm{Re}(s) > 1$ に注意せよ.）

最終的に，$\xi(s)$ に対する下記の積分表示を得る.

命題 6.4. $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して，

$$\xi(s) = \int_1^\infty \varphi(t) \left\{ t^{\frac{s}{2}} + t^{\frac{1-s}{2}} \right\} \frac{dt}{t} - \frac{1}{s(1-s)}. \tag{6.1}$$

補題 6.5. 定積分

$$\int_1^\infty \varphi(t)\, t^\alpha \, \frac{dt}{t}$$

は，任意の複素数 α に対して，絶対収束する．

証明. 任意の複素数 α をとる．$\varphi(t)$ の一様収束性より，

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t)\, t^{\alpha+1} = \lim_{t\to\infty} t^{\alpha+1} \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} = 0$$

となる．よって，任意の $t > 0$ に対して，ある $M > 0$ が存在して，$|\varphi(t) t^{\alpha+1}| < M$ となる．よって，

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \left|\phi(t)\, t^\alpha\right| \frac{dt}{t} &= \int_1^\infty \left|\phi(t)\, t^{\alpha+1}\right| \frac{dt}{t^2} \\ &< M \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = M\Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^\infty = M < \infty\end{aligned}$$

となり，証明が終わる． □

上の補題より，(6.1) の右辺の積分は，任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して，絶対収束する．さらに，(6.1) の右辺は，s と $1-s$ を入れ替えても不変である．

定理 6.6 (Riemann 1859)**.**

1. $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して，$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ は絶対収束して，そこで正則となる．$\zeta(s)$ は複素平面全体に解析接続されて，$s = 1$ での一位の極を除いて正則となる．
2. $\xi(s) := \pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s)$ とおくと，$\xi(s)$ は関数等式を満たす．

$$\xi(1-s) = \xi(s).$$

定理 6.7 (Euler)**.** $s \neq 0, 1$ に対して，

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\Big(\frac{\pi s}{2}\Big)\zeta(s).$$

証明. 定理 6.6 より，

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s).$$

両辺に $\pi^{(1-s)/2}\Gamma\Big(\dfrac{s+1}{2}\Big)$ を掛けると，以下を得る．

$$\pi^{1/2}\pi^{-s}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s+1}{2}\Big)\zeta(s)=\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1+s}{2}\Big)\zeta(1-s). \tag{6.2}$$

ガンマ関数の倍数公式 (5.4) より，$(m=2)$

$$\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\Big)=\pi^{1/2}2^{1-s}\Gamma(s),$$

ガンマ関数の相補公式 (5.3) より，

$$\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{1-s}{2}\Big)=\frac{\pi}{\sin(\pi(1-s)/2)}=\frac{\pi}{\cos(\pi s/2)}$$

が得られる．これらを (6.2) に代入すれば，定理の主張を得る． □

定理 6.8. *1.* $\zeta(0)=\text{“}1+1+1+\dots\text{”}=-\frac{1}{2}$

2. $\zeta(-1)=\text{“}1+2+3+\dots\text{”}=-\frac{1}{12}$

3. $\zeta(-2)=\text{“}1^2+2^2+3^2+\dots\text{”}=0$

4. $\zeta(-3)=\text{“}1^3+2^3+3^3+\dots\text{”}=\frac{1}{120}$

証明． 下記の関数等式を用いる：

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\Big(\frac{\pi s}{2}\Big)\zeta(s). \tag{6.3}$$

(i)　(6.3) で，極限 $s\to 1$ を取る：

$$\begin{aligned}\lim_{s\to1}\zeta(s-1)&=\lim_{s\to1}\Big\{2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\frac{\cos(\pi s/2)}{s-1}(s-1)\zeta(s)\Big\}\\&=2(2\pi)^{-1}\Gamma(1)(-\pi/2)\cdot1=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(ii)　(6.3) で $s=2$ とする：

$$\zeta(-1)=2(2\pi)^{-2}\Gamma(2)\cos(\pi)\zeta(2)=2(4\pi^2)^{-1}(-1)\pi^2/6=-\frac{1}{12}.$$

(iii)　(6.3) で $s=3$ とする：

$$\zeta(-2)=2(2\pi)^{-3}\Gamma(3)\cos(3\pi/2)\zeta(3)=0.$$

（$\cos(3\pi/2)=0$ に注意）

(iv)　(6.3) で $s=4$ とする：

$$\zeta(-3)=2(2\pi)^{-4}\Gamma(4)\cos(2\pi)\zeta(4)=2(16\pi^4)^{-1}\cdot3!\cdot\pi^4/90=\frac{1}{120}.$$

□

7　$\zeta(s)$ の特殊値とベルヌイ数

以下の命題から始める．

命題 7.1. ある $r>0$ が存在して，$|z|<r$ に対して，下記が成り立つ．

$$\pi z \cot \pi z = 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty} \zeta(2m)\, z^{2m}.$$

証明. 系 4.7 より，

$$\begin{aligned}\pi z \cot \pi z &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2-n^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\frac{z}{n})^2}{1-(\frac{z}{n})^2} \\ &= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{z}{n}\Big)^{2m} = 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}\Big] z^{2m} \\ &= 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty}\zeta(2m)\, z^{2m}.\end{aligned}$$

□

定義 7.2 (ベルヌイ数)**.** ベルヌイ数 B_n $(n=0,1,2,3,\dots)$ を下記で定義する．

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n.$$

例：

$$\begin{aligned}&B_0 = 1,\, B_1 = -\frac{1}{2},\, B_2 = \frac{1}{6},\, B_4 = -\frac{1}{30}, \\ &B_4 = \frac{1}{42},\, B_6 = -\frac{1}{30},\, B_{10} = -\frac{5}{66}, \\ &B_{2n+1} = 0\,(n=0,1,2,\dots)\end{aligned}$$

さて

$$f(z) := \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \frac{z(e^z+1)}{2(e^z-1)} = \frac{z}{2}\cdot\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}$$

とおく．$f(-z)=f(z)$ で $f(z)$ は $z=0$ で正則である．よって，

$$\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$$

となり，この式で z を $2\pi iz$ で置き換えて，命題 7.1 を使えば，

$$\begin{aligned}
&\pi iz\frac{e^{\pi iz}+e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz}-e^{-\pi iz}}=\pi z\frac{\cos\pi z}{\sin\pi z}=\pi z\cot\pi z\\
&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}2^{2n}\pi^{2n}(-1)^n z^{2n}\\
&=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_{2n}}{(2n)!}2^{2n}\pi^{2n}z^{2n}\\
&=1-\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(2n)z^{2n}
\end{aligned}$$

を得る．

以上により，下記が証明された．

定理 7.3. $n\in\mathbb{N}$ に対して，下記が成り立つ．

$$\zeta(2n)=\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}.$$

特に，下記が成り立つ．

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\ \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},\ \zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450},\ \zeta(10)=\frac{\pi^{10}}{93555},\ \zeta(12)=\frac{691\pi^{12}}{638512875},\dots$$

次に，$\zeta(s)$ の関数等式において：

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s),$$

$s=2n$ $(n\in\mathbb{N})$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\zeta(1-2n)&=2(2\pi)^{-2n}\Gamma(2n)\cos(\pi n)\zeta(2n)\\
&=2(2\pi)^{-2n}(2n-1)!(-1)^n\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}\\
&=-\frac{B_{2n}}{2n}.
\end{aligned}$$

また，関数等式で $s=2n+1$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\zeta(-2n)&=2(2\pi)^{-2n-1}\Gamma(2n+1)\cos(n\pi+\pi/2)\zeta(2n+1)\\
&=0.
\end{aligned}$$

ここで，$\cos(n\pi+\pi/2)=0$ を用いた．以上をまとめて，

定理 7.4. $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}, \quad \zeta(-2n) = 0$$

が成り立つ．

命題 7.5.

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma,$$
$$\lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right) = -\gamma.$$

ここで，γ はオイラー定数である．

証明. $\mathrm{Re}(s) > 0$ かつ $s \neq 1$ における $\zeta(s)$ の積分表示 (3.6)：

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + s\int_1^\infty \big([t]-t\big)t^{-s-1}\,dt,$$

を用いると，下記のように計算できる．

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = 1 - \int_1^\infty \frac{t-[t]}{t^2}\,dt = \gamma.$$

最後の等式は，定理 3.4 で示された．

一方，$s=1$ の近傍で正則で，$g(1)=1$ なる関数 $g(s)$ が存在し

$$\zeta(s) = \frac{g(s)}{s-1}$$

をみたす．両辺の対数微分を取り，極限を取る．

$$\lim_{s\to 1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}\right) = \lim_{s\to 1}\frac{g'(s)}{g(s)}.$$

ここで，

$$\begin{aligned} g(s) = (s-1)\zeta(s) &= (s-1)\left\{\frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1)\right\} \\ &= 1 + \gamma(s-1) + O((s-1)^2), \end{aligned}$$

より，$g'(s) = \gamma + O(s-1)$ なので，

$$\frac{g'(s)}{g(s)} = \frac{\gamma + O(s-1)}{1+\gamma(s-1)+O((s-1)^2)} \to \gamma \quad (s\to 1)$$

となる． □

定理 7.6.

$$\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log(2\pi).$$

証明. 下記の関数等式の両辺に，$\Gamma(1-s)$ を掛けて，

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s),$$

公式 (5.3)：

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin(\pi s/2)\cos(\pi s/2)},$$

を使うと，下記を得る．

$$\zeta(s) = (2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)2\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

次に，$(s-1)$ を掛けて，両辺の対数微分を取ると，

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} = \log(2\pi) - \frac{\Gamma'(2-s)}{\Gamma(2-s)} + \frac{\pi}{2}\frac{\cos(\pi s/2)}{\sin(\pi s/2)} - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}$$

となる．$s \to 1$ として，先の命題と系 5.3 より，$\Gamma'(1) = -\gamma$ を使うと，

$$\zeta'(0) = \zeta(0)\cdot\log(2\pi) = -\frac{1}{2}\log(2\pi)$$

を得る． □

8 ゼータ正規化積

$\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正の実数からなる数列とする．

定義 8.1 ($\boldsymbol{a}$ **のゼータ関数**)**.**

$$\zeta_{\boldsymbol{a}}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s} \qquad \text{for } \operatorname{Re} s \gg 0. \quad (\operatorname{Re} s \text{ が十分大きいとき})$$

ここで，$a_n^{-s} := \exp(-s\log a_n) = e^{-s\log a_n}$ である．

●[仮定] $\zeta_{\boldsymbol{a}}(s)$ が，$s=0$ を含むある領域まで解析接続されて，$s=0$ で正則と仮定する．

定義 8.2 (ゼータ正規化積)**.** 列 $\boldsymbol{a}$ が上の仮定を満たすとき．$\boldsymbol{a}$ の正規化積を下記で定義する．

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n := \exp\Big(-\frac{\partial}{\partial s}\zeta_{\boldsymbol{a}}(s)\Big|_{s=0}\Big).$$

注意. $\boldsymbol{a} = \{a_1, \ldots, a_N\}$ が有限列のとき，$\zeta_{\boldsymbol{a}}(s) = a_1^{-s} + \cdots + a_N^{-s}$ となり，

$$-\frac{\partial}{\partial s}\zeta_{\boldsymbol{a}}(s)\Big|_{s=0} = \log a_1 + \cdots + \log a_N = \log(\prod_{i=1}^{N} a_i)$$

となる．よって，このときは

$$\exp\Big(-\frac{\partial}{\partial s}\zeta_{\boldsymbol{a}}(s)\Big|_{s=0}\Big) = \prod_{i=1}^{N} a_i$$

となり，実数の（通常の）積になる．

定理 8.3 (Riemann 1859)**.**

$$\infty! := \prod_{n=1}^{\infty} n = \sqrt{2\pi}.$$

証明. $\boldsymbol{a} = \{a_n = n\}$ に対して，$\zeta_{\boldsymbol{a}}(s) = \zeta(s)$ はリーマンゼータ関数になる．よって，

$$-\frac{\partial}{\partial s}\zeta_{\boldsymbol{a}}(s)\Big|_{s=0} = -\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s)\Big|_{s=0} = -\zeta'(0) = \frac{1}{2}\log(2\pi)$$

となる．以上より，

$$\prod_{n=1}^{\infty} n = \exp(-\zeta'(0)) = \sqrt{2\pi}$$

となる． □

定理 8.4.

$$\prod_{n=1}^{\infty}(2n-1) = \sqrt{2}, \quad \prod_{n=1}^{\infty}(2n) = \sqrt{\pi}.$$

証明. $\zeta_1(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s}$ とおく．$\zeta_1(s) + 2^{-s}\zeta(s) = \zeta(s)$ より，$\zeta_1(s) = (1-2^{-s})\zeta(s)$ となるので，

$$\zeta_1'(s) = \log 2 \cdot 2^{-s}\zeta(s) + (1-2^{-s})\zeta'(s).$$

よって，

$$-\zeta_1'(0) = -\log 2\zeta(0) = \frac{1}{2}\log 2,$$

となるので，

$$\exp(-\zeta_1'(0)) = \sqrt{2}$$

となる．次に，$\zeta_2(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = 2^{-s}\zeta(s)$ とおく．このとき，

$$\zeta_2'(s) = -\log 2 \cdot 2^{-s}\zeta(s) + 2^{-s}\zeta'(s)$$

となり，

$$-\zeta_2'(0) = \log 2 \cdot \zeta(0) - \zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log(2\pi) = \frac{1}{2}\log \pi,$$

となるので，

$$\exp(-\zeta_2'(0)) = \sqrt{\pi}.$$

□

定義 8.5 (フルビッツゼータ関数)**.** 実数 $x > 0$ と $\mathrm{Re}(s) > 1$ なる $s \in \mathbb{C}$ に対して，フルビッツゼータ関数は，以下で定義される．

$$\zeta(s, x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s}.$$

- $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$：リーマンゼータ関数．

$\zeta(s, x)$ は，s の関数として複素平面全体に解析接続されて，$s = 1$ での留数 1 の一位の極を除いて，正則となる．

定理 8.6 (Lerch 1894)**.**

$$\prod_{n=0}^{\infty}(n+x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)},$$

つまり，以下が成り立つ．

$$-\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s, x)\bigg|_{s=0} = \log \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)}.$$

証明. はじめに，以下に注意する．

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\zeta(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(s+1)}{(n+x)^{s+2}} = s(s+1)\zeta(s+2, x).$$

さらに，s に関して微分して，$s=0$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^3}{\partial s \partial x^2}\zeta(s,x)\bigg|_{s=0} \\
&= \left\{(2s+1)\zeta(s+2,x)+s(s+1)\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s+2,x)\right\}\bigg|_{s=0} \\
&= \zeta(2,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2}.
\end{aligned}$$

次に，$f(x) := \dfrac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=0} - \log\Gamma(x)$ とおく．すると，系 5.3 より，$f''(x)=0$ となる．よって，定数 a, b を用いて，$f(x)=ax+b$ とかける．

$f(x)$ が定数，つまり $a=0$ を示す．

$$\begin{aligned}
f(x+1) &= \frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x+1)\bigg|_{s=0} - \log\Gamma(x+1) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=0} - (-\log x) - \log\Gamma(x) - \log x \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

よって，$a(x+1)+b = ax+b$ となり，$a=0$ が示せた．最後に，b を決める．$f(1/2)$ を計算する．

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \zeta'\left(0,\frac{1}{2}\right) - \log\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ と

$$\begin{aligned}
\zeta\left(s,\frac{1}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^s}{(2n+1)^s} \\
&= 2^s(1-2^{-s})\,\zeta(s) = (2^s-1)\,\zeta(s)
\end{aligned}$$

である．定理 8.4 において，$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-s} = \zeta_1(s)$ だったので，

$$\zeta'\left(0,\frac{1}{2}\right) = \log 2\cdot\zeta(0) + \{(2^s-1)\zeta'(s)\}\Big|_{s=0} = -\frac{1}{2}\log 2$$

となる．以上より，

$$b = -\frac{1}{2}\log 2 - \log\sqrt{\pi} = -\frac{1}{2}\log(2\pi)$$

となるので，

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=0} &= -\log\Gamma(x) + \frac{1}{2}\log(2\pi) \\
&= \log\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)},
\end{aligned}$$

と計算されて，

$$\prod_{n=0}^{\infty}(n+x)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(x)}$$

となる． □

9　セルバーグゼータ関数

記号：

- $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})=\left\{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\mid a,b,c,d\in\mathbb{R},\,ad-bc=1\right\}$
  ：特殊線形群（行列の積で群になる，実リー群）
- $G=\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$
- $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}\,z>0\}$：上半平面
- $\Gamma\subset G$：ココンパクトなトーションのない離散部分群

このとき，商空間 $X=\Gamma\backslash\mathbb{H}$ は種数 $g\geq 2$ のコンパクトリーマン面となる．(G は $\mathbb{H}$ に一次分数変換 $g.z=\frac{az+b}{cz+d}$ で作用し，$\mathbb{H}$ 上の G-不変ハール測度は $d\mu(z):=dxdy/y^2$ となる．）

セルバーグゼータ関数とは？

- $\mathbb{R}\supset\mathbb{Z}\supset\{p\mid p\text{ は素数 }\}\rightsquigarrow\zeta(s)=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$：リーマンゼータ関数
- $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\supset\Gamma\supset\mathrm{Prim}(\Gamma)$：原始的双曲共役類 $\rightsquigarrow Z_\Gamma(s)$：セルバーグゼータ関数

$\gamma\in\Gamma$ を双曲的な元，つまり $|\operatorname{tr}(\gamma)|>2$ とすると，γ の Γ における中心化群は無限巡回群になり，γ は G において，下記の元と共役になる．(ある $g\in G$ が存在して，$g\gamma g^{-1}$ が下記の対角行列になる．）

$$\gamma\sim\begin{pmatrix}N(\gamma)^{1/2}&0\\0&N(\gamma)^{-1/2}\end{pmatrix}\quad\text{ただし } N(\gamma)>1.$$

$\mathrm{Prim}(\Gamma):=\{[\delta]\mid\delta\in\Gamma,\delta\text{ が原始的双曲元 }\}$ を Γ の原始的双曲元の Γ-共役類の集合とする．(ここで，$[\delta]=\{\gamma\delta\gamma^{-1}\mid\gamma\in\Gamma\}$ で，原始的双曲元とは他の双曲元のべきでかけない双曲元のこと．）

• 群，部分群，作用，共役，共役類などの「群論」の専門用語については，[6] を参照．

定義 9.1 (セルバーグゼータ関数)**.** Γ （または X） に対するセルバーグゼータ関数は，

下記のオイラー積で定義される．

$$Z_\Gamma(s) := \prod_{p\in\mathrm{Prim}(\Gamma)} \prod_{k=0}^{\infty} \Bigl(1 - N(p)^{-(k+s)}\Bigr) \qquad \text{for } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Selberg は $Z_\Gamma(s)$ について下記の定理を証明した．

定理 9.2 (Selberg 1956, [12])**.** *1.* $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して定義された $Z_\Gamma(s)$ は $\mathbb{C}$ 全体に有理型関数として解析接続される．（実際は，整関数になる）．

2. $Z_\Gamma(s)$ は $s = -k$ $(k \in \mathbb{N})$ に，位数 $(2g-2)(2k+1)$ の零点を持ち，$s = 0$ に，位数 $2g-1$ と $s = 1$ に，位数 1 の零点を持つ　：自明零点．

3. $Z_\Gamma(s)$ は $s = \frac{1}{2} \pm ir_n$ において零点を持つ　：非自明零点

ここで, $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = \{f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}, \text{可測} \mid f(\gamma z) = f(z)\, \forall\gamma \in \Gamma, \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} |f(z)|^2\, d\mu(z) < \infty\}$ に作用するラプラシアン $\Delta_0 = -y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ の固有値の集合を $\{\lambda_n = 1/4 + r_n^2\}_{n=0}^{\infty}$ とおいた．（$\varphi_n(z)$ が n 番目の固有関数．$\Longleftrightarrow \Delta_0\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$．）

このゼータ関数 $Z_\Gamma(s)$ は下記の関数等式を満たす：

定理 9.3 (Selberg による関数等式 1956, [12])**.**

$$Z_\Gamma(1-s) = Z_\Gamma(s)\exp\Bigl(-4(g-1)\pi\int_0^{s-\frac{1}{2}} r\,\tan(\pi r)\,dr\Bigr).$$

この関数等式は二重ガンマ関数を使って，対称な関数等式に書き直すことが出来る．

$$\hat{Z}_\Gamma(1-s) = \hat{Z}_\Gamma(s) := Z_\Gamma(s)\bigl(\Gamma_2(s)\Gamma_2(s+1)\bigr)^{2g-2}.$$

ここで, $\Gamma_2(z) = \exp(\zeta_2'(0,z))$ は二重ガンマ関数であり, $\zeta_2(s,z) = \sum_{n,m\geq 0}(n+m+z)^{-s}$ は二重フルビッツゼータ関数である．

Selberg の定理 9.2, 9.3 は**セルバーグ跡公式**（“**非可換ポアソン和公式**”）を用いて証明される．跡公式の左辺はラプラシアンの固有値に渡る和で,“スペクトル辺”と呼ばれている．また，跡公式の右辺は離散群 Γ の共役類に渡る和で，“幾何学的辺”と呼ばれている．

Γ_{hyp} を Γ の双曲的共役類の集合とする．双曲的な元 γ に対して，γ_0 を中心化群 $Z_\gamma(\Gamma)$ の生成元とする．

定理 9.4 (セルバーグ跡公式，h：試験関数)**.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(r_n) = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} rh(r)\tanh(\pi r)\,dr + \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{hyp}}} \frac{\log N(\gamma_0)}{N(\gamma)^{1/2}-N(\gamma)^{-1/2}} g(\log N(\gamma)).$$

ここで，$g(u)$ は $h(r)$ のフーリエ変換で，上記の跡公式は，下記の条件を満たす試験関数 $h(r)$ に対して証明できる．また，$\tanh(z) = \frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$ である．

- $h(r) = h(-r)$, $h(r)$ は $|\,\mathrm{Im}(r)| < \frac{1}{2}+\delta$ $(\exists\delta>0)$ において解析的.
- $h(r) = O\big((1+|r|)^{-2-\delta}\big)$ $(\mathrm{Re}(r)\to\infty)$.
- $g(u) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(r)e^{-iru}\,dr$.

セルバーグゼータ関数の性質（定理 9.2，9.3）は，セルバーグ跡公式（定理 9.4）を用いて証明できる．以下ではこれを説明する．

実数 $\beta \geq 2$ を固定する．下記の試験関数を考える．

$$h(r) = \frac{1}{r^2+(s-\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{r^2+\beta^2},$$

このとき，$h(r)$ はセルバーグ跡公式の条件を満たすことが確かめられる．$h(r)$ のフーリエ変換は

$$g(u) = \frac{1}{2s-1}e^{-(s-\frac{1}{2})|u|} - \frac{1}{2\beta}e^{-\beta\,|u|},$$

と計算されるので，下記の命題を得る．

命題 9.5. $s\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s)>1$ に対して，下記が成立する．

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{r_n^2+(s-\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{r_n^2+\beta^2}\Big] = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{s+k} - \frac{1}{\beta+\frac{1}{2}+k}\Big] + \frac{1}{2s-1}\frac{Z_\Gamma'(s)}{Z_\Gamma(s)} - \frac{1}{2\beta}\frac{Z_\Gamma'(\frac{1}{2}+\beta)}{Z_\Gamma(\frac{1}{2}+\beta)}. \tag{9.1}$$

証明. $I(s)$ を単位元からの寄与とする．

$$I(s) := \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{r^2+(s-\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{r^2+\beta^2}\right] r\tanh(\pi r)\,dr.$$

$\tanh(\pi r) = \frac{1-e^{-2\pi r}}{1+e^{-2\pi r}}$ に注意して，留数定理と部分分数分解の公式：

$$\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left[\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right],$$

を使えば，下記を得る．

$$I(s) = \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{s+k} - \frac{1}{\beta+\frac{1}{2}+k}\right].$$

次に，

$$H(s) := \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{hyp}}}\frac{\log N(\gamma_0)}{N(\gamma)^{1/2}-N(\gamma)^{-1/2}}e^{-(s-\frac{1}{2})\log N(\gamma)},$$

とおくと，双曲的共役類からの寄与は，以下で与えられる．

$$\frac{1}{2s-1}H(s) - \frac{1}{2\beta}H(\beta+\tfrac{1}{2}).$$

$H(s)$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
H(s) &= \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{hyp}}}\frac{\log N(\gamma_0)}{1-N(\gamma)^{-1}}N(\gamma)^{-s} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p\in\mathrm{Prim}(\Gamma)}\frac{\log N(p)}{1-N(p)^{-k}}N(p)^{-ks} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p\in\mathrm{Prim}(\Gamma)}\log N(p)\cdot N(p)^{-k(s+m)} \\
&= \frac{d}{ds}\sum_{p\in\mathrm{Prim}(\Gamma)}\sum_{m=0}^{\infty}\log\Bigl(1-N(p)^{-(s+m)}\Bigr) \\
&= \frac{d}{ds}\log Z_\Gamma(s).
\end{aligned}$$

これで，証明された．　□

この命題を使えば，$Z_\Gamma(s)$ の解析的性質，つまり定理 9.2 を証明できる．また，(9.1) の左辺は s を $1-s$ に置き換えても不変であり，(9.1) 式と (9.1) で s を $1-s$ に置き換えた式との差を考えれば、下記を得る．

$$\frac{Z_\Gamma'(s)}{Z_\Gamma(s)} + \frac{Z_\Gamma'(1-s)}{Z_\Gamma(1-s)} = -(2s-1)\frac{4\pi(g-1)}{2\pi}\pi\cot(\pi s).$$

これから，定理 9.3 を得る．

参考文献

[1] 小山信也，素数とゼータ関数，共立出版.

[2] 小山信也，セルバーグ・ゼータ関数，日本評論社.

[3] 権 寧魯, セルバーグゼータ関数と素測地線定理の現在, 第 63 回代数学シンポジウム報告集. https://mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp18.html

[4] 野村隆昭，複素関数論講義，共立出版.

[5] 雪江明彦，概説 微分積分学，培風館.

[6] 雪江明彦，代数学 1 群論入門，日本評論社.

[7] 雪江明彦，代数学 2 環と体とガロア理論，日本評論社.

[8] L. V. Ahlfors, Complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978. xi+331 pp.

[9] T. M. Apostol, Introduction to analytic number theory. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976. xii+338 pp.

[10] H. M. Edwards, Riemann's zeta function. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2001. xiv+315 pp.

[11] D. A. Hejhal, The Selberg trace formula for $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Vol. 1. Lecture Notes in Mathematics, **548**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. vi+516 pp.

[12] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. J. Indian Math. Soc. (N.S.) **20** (1956), 47–87.

[13] J. P. Serre, A course in arithmetic. Translated from the French. GTM **7**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. viii+115 pp.

Yasuro Gon

Faculty of Mathematics, Kyushu University

744 Motooka, Fukuoka 819-0395, Japan