九州大学大学院数理学府

2024年度修士課程入学試験
基礎科目問題

注意 • 問題 [1][2][3][4] のすべてに解答せよ.

• 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] $a \in \mathbb{R}$ とし $A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{pmatrix}$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値が 3，-3，-3 となるような a を選ぶ．このとき，直交行列を用いて A を対角化せよ．

[2]　$\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を次で定める．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ の値を求めよ．

(2) f が C^1 級であることを示せ．

(3) f が C^2 級ではないことを示せ．

[3] $\mathbb{Z}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \, x_1,\, x_2 \in \mathbb{Z} \right\}$, $T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \, 0 \leq x_1 < 1,\, 0 \leq x_2 < 1 \right\}$ とおく．$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して $A^n\mathbf{x} - \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$ となるような $\mathbf{x} \in T$ の個数を $F_n(A)$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $F_n(A) = |\det(A^n - E)|$ を示せ．ただし，E は単位行列である．

(2) $F_n(A) = \mathrm{tr}(A^n) - 2$ を示せ．ただし，$\mathrm{tr}(A^n)$ は A^n のトレースである．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log F_n(A)}{n}$ の値を求めよ．

[4] $n \in \mathbb{N}$ に対し，関数 $\varphi_n\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を次で定める．

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{1}{nx}\right)$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) 関数列 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $(0,\infty)$ 上で 0 に一様収束するか否かを理由とともに答えよ．

(2) $\psi\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ は

$$\limsup_{x\to+0} |\psi(x)| = 0, \qquad \limsup_{x\to\infty} |\psi(x)| < \infty$$

を満たす連続関数とする．このとき，関数列 $\{\psi\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $(0,\infty)$ 上で 0 に一様収束することを示せ．