九州大学大学院数理学府
2023 年度修士課程入学試験
数学問題（MMAコース）

注意
- 問題 [1][2][3][4][5][6] の中から 3 題を選択して解答せよ．
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 3 題分提出すること．
- 以下，$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数 a について，広義積分

$$\int_0^a \sqrt{\frac{1+\cos x}{\cos x - \cos a}}\,dx$$

を求めよ．

[2] 行列 A と B を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 & -12 & 24 \\ 3 & -4 & 6 \\ -3 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

で定める．以下の問に答えよ．

(1) A は実数係数の範囲で対角化可能であるか，理由を付けて答えよ．

(2) $P^{-1}BP = D$ を満たす，実数を成分とする正則な 3 次正方行列 P および 3 次の対角行列 D を一つ挙げよ．

[3]　c を正の定数とする．2 次元確率変数 (X, Y) で，同時確率密度関数が

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c & (0 \leq x \leq 1 \text{ かつ } x \leq y \leq x + 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

で与えられる連続型の確率分布に従うものを考える．以下の問に答えよ．

(1) c の値を求めよ．

(2) X の周辺確率密度関数，期待値，および分散を求めよ．

(3) Y の周辺確率密度関数，期待値，および分散を求めよ．

[4] $0 < \varepsilon < 2\pi$ とし，$f_\varepsilon(t)$ を以下の条件を満たす周期 2π の関数とする．

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & (-\pi < t \leq -\pi + \varepsilon \text{ のとき}) \\ 0 & (-\pi + \epsilon < t \leq \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

以下の問に答えよ．

(1) $f_\varepsilon(t)$ のフーリエ級数を $a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ とする．a_0 および，各 $n \in \mathbb{N}$ について a_n と b_n を求めよ．

(2) 各 $n \in \mathbb{N}$ について，$\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{|a_n|}{|a_0|}$ および $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{|b_n|}{|a_0|^2}$ を求めよ．

[5] 実数値関数 $x(t), y(t)$ に対して，以下の連立微分方程式を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases} \tag{$\star$}$$

以下の問に答えよ．

(1) $(x(0), y(0)) = (1, -2)$ を満たす連立微分方程式 $(\star)$ の解を求めよ．

(2) $a, b \in \mathbb{R}$ について，初期値 $(x(0), y(0)) = (a, b)$ に対する連立微分方程式 $(\star)$ の解 $(x(t), y(t)) = (x_{a,b}(t), y_{a,b}(t))$ が描く曲線を

$$C_{a,b} = \{(x_{a,b}(t), y_{a,b}(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq 0\}$$

とおく．関数 $h(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + y^2$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ が，任意の a, b に対して $C_{a,b}$ 上で定数となるとき，α と β の値を求めよ．

[6] i を虚数単位として，複素平面内の閉曲線 $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ を

$$\gamma(\theta) = \frac{\sqrt{2}\cos\theta}{1+\sin^2\theta}(1 + i\sin\theta)$$

で定める．以下の問に答えよ．

(1) 曲線 γ の概形を描け．

(2) 複素関数

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{(z+1)^2}$$

の曲線 γ に沿った周回積分を求めよ．