九州大学大学院数理学府
2024 年度修士課程入学試験
数学問題（ＭＭＡコース）

注意 • 問題 [1][2][3][4][5][6] の中から 3 題を選択して解答せよ．

• 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 3 題分提出すること．

• 以下，$\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体を表し，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] $a \in \mathbb{R}$ とし $A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{pmatrix}$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値が 3，-3，-3 となるような a を選ぶ．このとき，直交行列を用いて A を対角化せよ．

[2] $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を次で定める．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ の値を求めよ．

(2) f が C^1 級であることを示せ．

(3) f が C^2 級ではないことを示せ．

[3] a を正の実数とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $x(t)$ に対する微分方程式

$$x'' - 2ax' + x = 0$$

の実数の一般解を求めよ．

(2) $x(t)$ に対する微分方程式

$$x'' - 2ax' + x = e^{at}$$

の実数の一般解を求めよ．

[4] $[0,\infty)$ 上の実数値関数 $f(t)$ に対し，ラプラス変換 $\mathcal{L}[f(t)]$ を

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

で定める．以下を満たす $[0,\infty)$ 上の実数値関数列 $\{y_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を考える．

$$y_{n+1}(t) = e^{\frac{t}{2}} y_n\left(\frac{t}{2}\right)$$

$Y_n = \mathcal{L}[y_n(t)]$ とおく．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $y_1(t) = e^t$ のとき $y_n(t)$ を求めよ．

(2) Y_{n+1} と Y_n の関係式を求めよ．

(3) $Y_1(s) = \dfrac{1}{s}$ のとき，$Y = \lim_{n\to\infty} Y_n$ を求め，さらに $\mathcal{L}[g(t)] = Y$ となる $g(t)$ を求めよ．

[5] c を正の定数とする．実数値確率変数 X は，以下の確率密度関数をもつとする．

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) 定数 c の値を求めよ．

(2) X の期待値および分散を求めよ．

(3) 実数 x に対して，$\lfloor x \rfloor$ で x 以下の最大の整数を表す．これを用いて離散型確率変数 Y を

$$Y = \begin{cases} \lfloor X \rfloor & (X \geq 0) \\ 0 & (X < 0) \end{cases}$$

と定めるとき，Y の期待値を求めよ．

[6] 以下の問に答えよ．ただし，i を虚数単位とする．

(1) 正の実数 R に対して，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}dt \leq \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R})$$

が成り立つことを示せ．

(2) 複素関数

$$f(z) = \frac{z^2 e^{2iz}}{z^4+1}$$

の $z = e^{\frac{\pi}{4}i}$ における留数を求めよ．

(3) 広義積分

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2(\sin(2x)+e^{-2x})}{x^4+1}dx$$

を求めよ．

[3] の解答

(1) 特性方程式は $z^2-2az+1=0$ であるから，特性根は $a\pm\sqrt{a^2-1}$ である．

(1) $a>1$ の場合：実数値の一般解は

$$x(t)=c_1e^{(a+\sqrt{a^2-1})t}+c_2e^{(a-\sqrt{a^2-1})t}\quad (c_1,c_2\text{ は任意の実数定数})$$

である．

(2) $a=1$ の場合：実数値の一般解は

$$x(t)=c_1e^t+c_2te^t\quad (c_1,c_2\text{ は任意の実数定数})$$

である．

(3) $a<1$ の場合：実数値の一般解は

$$x(t)=c_1e^{at}\cos(\sqrt{1-a^2}t)+c_2e^{at}\sin(\sqrt{1-a^2}t)\quad (c_1,c_2\text{ は任意の実数定数})$$

である．

(2) 与えられた非斉次方程式の解をひとつ見つけて，(1) で求めた斉次方程式の一般解との和を取ればよい．解をひとつ見つけるために，a が 1 かどうかで場合分けする．

まず $a\neq 1$ の場合を考える．このとき，与えられた非斉次方程式のひとつの解を $x(t)=Ae^{at}$（A は定数）の形から探す．実際に $x''-2x'+x=e^{at}$ に代入して係数を決定すると，$A=1/(1-a^2)$ となるので，$\frac{1}{1-a^2}e^{at}$ が非斉次方程式のひとつの解である．

次に $a=1$ の場合を考える．微分作用素 $\frac{d}{dt}$ を D と書くと，方程式は $(D^2-2D+1)x=e^t$ である．関数 e^t は y に関する微分方程式 $y'-y=(D-1)y=0$ の解なので，方程式の解 x は斉次方程式 $(D-1)(D^2-2D+1)x=0$ の解でもある．この方程式の特性方程式は $(z-1)^3=0$ だから，基本解は e^t,te^t,t^2e^t である．このうち e^t,te^t は対応する斉次方程式式 $x''-2x'+x=0$ の基本解でもあるので，与えられた非斉次方程式のひとつの解は $x(t)=At^2e^t$（A は定数）の形で探せば十分である．実際に $x''-2x'+x=e^t$ に代入して係数を決定すると $A=1/2$ となるので，$\frac{1}{2}t^2e^t$ が非斉次方程式のひとつの解である．

以上から，実数値の一般解は，c_1,c_2 を任意の実数定数として次のようになる：

(1) $a>1$ の場合：

$$x(t)=c_1e^{(a+\sqrt{a^2-1})t}+c_2e^{(a-\sqrt{a^2-1})t}+\frac{1}{1-a^2}e^{at}.$$

(2) $a = 1$ の場合：

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{1}{2} t^2 e^t.$$

(3) $a < 1$ の場合：

$$x(t) = c_1 e^{at} \cos(\sqrt{1 - a^2} t) + c_2 e^{at} \sin(\sqrt{1 - a^2} t) + \frac{1}{1 - a^2} e^{at}.$$

[4] の解答

(1) 数学的帰納法により $y_{n+1} = e^t$ を証明する．

$y_n = e^t$ のとき，$y_{n+1} = e^{\frac{t}{2}} y_n(\frac{t}{2}) = e^{\frac{t}{2}} e^{\frac{t}{2}} = e^t$

(2)

$$Y_{n+1} = \mathcal{L}\left[y_{n+1}\right] = \mathcal{L}\left[e^{\frac{t}{2}} y_n(\frac{t}{2})\right] = \int_0^\infty e^{\frac{t}{2}} y_n(\frac{t}{2}) e^{-st} dt$$

$$= 2\int_0^\infty e^p y_n(p) e^{-2sp} dp = 2\int_0^\infty y_n(p) e^{-(2s-1)p} dp = 2Y_n(2s-1)$$

(ここで $t = 2p$)

$Y_{n+1}(s) = 2Y_n(2s-1)$

(3) 計算すると $Y_1 = \frac{1}{s}$, $Y_2 = \frac{1}{s-\frac{1}{2}}$, $Y_3 = \frac{1}{s-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$ となるので

$$Y_{n+1} = \frac{1}{s - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}}$$

という予想がたつ。

証明は数学的帰納法を用いる

$$Y_n = \frac{1}{s - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}}$$

のとき

$$Y_{n+1} = 2Y_n(2s-1) = \frac{2}{2s - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}} = \frac{1}{s - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}}$$

$n \to \infty$ のとき $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1$ より

$$Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

また，ラプラス逆変換の公式より $g(t) = e^t$

（y_n の形からも予想可能）

[5] の解答

(1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^{\infty} = \frac{c}{2}$$

より，$c = 2$ である．

(2) 期待値は

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} 2xe^{-2x}dx = \left[-xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

であり，分散は

$$\mathbf{V}[X] = \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 2e^{-2x}dx = \frac{1}{4}$$

である．

(3) 整数値を取りうる離散型確率変数 Y の確率分布は

$$P(Z = n) = \begin{cases} \int_n^{n+1} f(x)dx = e^{-2n} - e^{-2(n+1)} & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

である．よって Y の期待値は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y] &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(Y = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\big(e^{-2n} - e^{-2(n+1)}\big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n} \\ &= \frac{1}{e^2 - 1} \end{aligned}$$

である．

[6] の解答

(1) まず $0 \leq t \leq \pi/2$ を満たす t に対して $\sin t \geq (2/\pi)t$ が成り立つことに注意する．よって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}t}dt \leq -\frac{\pi}{2R}\Big[e^{-\frac{2R}{\pi}t}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R})$$

が成り立ち，証明が完了する．

(2) $z = e^{\frac{\pi}{4}i}$ は 1 位の極であり，$z = e^{\frac{\pi}{4}i}$ における留数を計算すると．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[e^{\frac{\pi}{4}i}] &= \lim_{z\to e^{\frac{\pi}{4}i}}(z-e^{\frac{\pi}{4}i})\frac{z^2e^{2iz}}{(z^4+1)} = \lim_{z\to e^{\frac{\pi}{4}i}}(z-e^{\frac{\pi}{4}i})\frac{z^2e^{2iz}}{(z^2-i)(z^2+i)} = \lim_{z\to e^{\frac{\pi}{4}i}}\frac{z^2e^{2iz}}{(z-e^{\frac{5\pi}{4}i})(z^2+i)}\\
&= \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}e^{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}}{(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)(e^{\frac{\pi}{2}i}+i)} = \frac{ie^{-\sqrt{2}}(\cos\sqrt{2}+i\sin\sqrt{2})}{2i(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}\\
&= \frac{e^{-\sqrt{2}}(\cos\sqrt{2}+i\sin\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{2(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)} = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}((\sin\sqrt{2}+\cos\sqrt{2})+i(\sin\sqrt{2}-\cos\sqrt{2}))
\end{aligned}$$

となる．

(3) R を 1 以上の十分大きな実数とし，Γ_R を「複素平面上で R から iR までの半径 R の円孤」とする．また C を「複素平面上で原点から R に行き，Γ_R を通って iR から原点に戻る経路」とする．$f(z)$ を (2) で考えた複素関数とする．経路 C の内部の $f(z)$ の極は $z = e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ のみである．また C 上で $f(z)$ を積分すると

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_0^R \frac{x^2e^{2ix}}{x^4+1}dx + \int_{\Gamma_R}\frac{z^2e^{2iz}}{z^4+1}dz + \int_R^0 \frac{(ix)^2e^{2i(ix)}}{(ix)^4+1}idx\\
&= \int_0^R \frac{x^2\cos(2x)+ix^2\sin(2x)}{x^4+1}dx + i\int_0^R\frac{x^2e^{-2x}}{x^4+1}dx + \int_{\Gamma_R}\frac{z^2e^{2iz}}{z^4+1}dz\\
&= \int_0^R \frac{x^2\cos(2x)}{x^4+1}dx + i\int_0^R \frac{x^2(\sin(2x)+e^{-2x})}{x^4+1}dx + \int_{\Gamma_R}\frac{z^2e^{2iz}}{z^4+1}dz.
\end{aligned}$$

また Γ_R において $z = Re^{\theta i} = R(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ と変数変換すると，

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\Gamma_R}\frac{z^2e^{2iz}}{z^4+1}dz\Big| &= \Big|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2e^{2\theta i}e^{2R(-\sin\theta+i\cos\theta)}}{R^4e^{4\theta i}+1}iRe^{i\theta}d\theta\Big|\\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|R^2e^{2\theta i}||e^{2R(-\sin\theta+i\cos\theta)}|}{|R^4e^{4\theta i}+1|}|iRe^{i\theta}|d\theta\\
&= \frac{R^3}{R^4-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2R\sin\theta}d\theta \leq \frac{R^3}{R^4-1}\cdot\frac{\pi}{4R}(1-e^{-2R}) \to 0 \quad (R\to+\infty)
\end{aligned}$$

が成り立つ．また，

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\cdot\mathrm{Res}[e^{\frac{\pi}{4}i}] = \frac{e^{-\sqrt{2}}\pi}{2\sqrt{2}}((\cos\sqrt{2}-\sin\sqrt{2})+i(\cos\sqrt{2}+\sin\sqrt{2}))$$

が成り立つため，

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos(2x)}{x^4+1}dx + i\int_0^{+\infty}\frac{x^2(\sin(2x)+e^{-2x})}{x^4+1}dx = \frac{e^{-\sqrt{2}}\pi}{2\sqrt{2}}((\cos\sqrt{2}-\sin\sqrt{2})+i(\cos\sqrt{2}+\sin\sqrt{2}))$$

が成り立ち，答えは

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2(\sin(2x)+e^{-2x})}{x^4+1}dx = \frac{e^{-\sqrt{2}}\pi}{2\sqrt{2}}(\cos\sqrt{2}+\sin\sqrt{2})$$