九州大学大学院数理学府
2024年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意

- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10][11] の中から 2 題を選択して解答せよ．
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること．
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] $\mathbb{R}^3$ 上に内積 $(\cdot\,,\,\cdot)$ を $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対して，

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

により定める．非零ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\mathbb{R}^3$ の線形変換 $\sigma_{\mathbf{u}}$ を次のように定める．

$$\sigma_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \frac{2(\mathbf{v}, \mathbf{u})}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}\mathbf{u}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\sigma_{\mathbf{u}}$ は線形空間 $\mathbb{R}^3$ の自己同型であることを示せ.

(2) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ を $\mathbb{R}^3$ の標準基底，すなわち，

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ および $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ とおく．$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ のとき $\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}_1}(\mathbf{v})$ と $\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}_2}(\mathbf{v})$ を v_1, v_2, v_3 を用いて表せ.

(3) $\mathbb{R}^3$ の線形自己同型群のなかで $\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}_1}$ と $\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}_2}$ が生成する部分群 G の位数と群構造を求めよ.

[2] $\mathrm{M}_2(K)$ を体 K 上の 2 次正方行列がなす行列環とする．H を次のように定義する.

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} u & -v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; u, v \in \mathbb{C} \right\}$$

ただし，$a \in \mathbb{C}$ に対して $\bar{a}$ は a の複素共役を表す. このとき，以下の問に答えよ．

(1) H は $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ の部分環であり，かつ可換環でないことを示せ.

(2) $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ の非零なべき零元を一つ求めよ.

(3) H と $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ は環として同型か否かを理由とともに答えよ．

[3]　K を複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体のうち，有理数体 $\mathbb{Q}$ と 2 の 4 乗根 $\sqrt[4]{2}$ を含む最小の体とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $X^4 - 2$ は多項式環 $\mathbb{Q}[X]$ における既約多項式であることを示せ.

(2) 体 K は $\mathbb{Q}[X]/(X^4 - 2)$ と同型であることを示せ.

(3) K の任意の元は

$$a_0 + a_1\sqrt[4]{2} + a_2(\sqrt[4]{2}\,)^2 + a_3(\sqrt[4]{2}\,)^3 \quad (a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q})$$

のように一意的に表されることを示せ.

[4]　開区間 J で定義された C^2 級曲線 $z = f(x)$ を z 軸の周りに回転した曲面

$$S = \{(v\cos u, v\sin u, f(v)) \mid 0 \leq u \leq 2\pi, v \in J\}$$

を考える．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 曲面 S の第 1 基本形式と第 2 基本形式を求めよ．

(2) 曲面 S のガウス曲率 K を求めよ．

(3) $J = (-1, 1)$ とする．曲面 S のすべての点でガウス曲率 K が 1 となる関数 $f(x)$ で，

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$$

を満たすものをすべて求めよ．

[5]　$\mathbb{C}^2$ の部分空間 T^2 を

$$T^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| = 1 = |z_2|\}$$

で定める．また，$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ に対し，連続写像 $f_{(a,b,c,d)}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を

$$f_{(a,b,c,d)}(z_1, z_2) = (z_1^a z_2^b, z_1^c z_2^d)$$

で定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f_{(a,b,c,d)}(T^2) \subset T^2$ を示せ．

(2) T^2 の整係数ホモロジー群を求めよ．

(3) $a, b, c, d, p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ とする．$f_{(a,b,c,d)}$ を T^2 に制限してえられる写像を $g_{(a,b,c,d)}\colon T^2 \to T^2$ とおく．$g_{(a,b,c,d)}$ と $g_{(p,q,r,s)}$ がホモトピックであるならば，$a = p$，$b = q$，$c = r$，$d = s$ であることを示せ．

[6]　$\mathbb{R}^4$ の部分空間 X を

$$X = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid xy + zw = 1\}$$

で定義する．このとき，以下の問に答えよ．

(1) X がコンパクトか否かを理由とともに答えよ．

(2) X が $\mathbb{R}^4$ の C^∞ 級部分多様体になることを示せ．また，その次元を求めよ．

(3) C^∞ 級関数 $h\colon X \to \mathbb{R}$ を $h(x, y, z, w) = x + 2y + 4z$ で定義する．このとき，h の臨界点をすべて求めよ．なお，点 $p \in X$ が h の臨界点とは点 p における微分 $(dh)_p : T_p(X) \to T_{h(p)}(\mathbb{R})$ が全射でないことである．

[7] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とし，$g, \tilde{g}, f_n$ $(n \in \mathbb{N})$ は X 上で定義された $\mathcal{A}$ 可測な実数値関数とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - g| d\mu = 0$ かつ μ に関してほとんど至るところ $\lim_{n\to\infty} f_n = \tilde{g}$ が成り立つとする．このとき，g と $\tilde{g}$ は μ に関してほとんど至るところ等しいことを示せ．

(2) ある定数 $C > 0$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_X |f_{n+1} - f_n| d\mu \leq \frac{C}{2^n}$$

が成り立つとする．このとき，μ に関してほとんど至るところ $\lim_{n\to\infty} f_n$ が存在することを示せ．

(3) $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - g| d\mu = 0$ とする．このとき，μ に関してほとんど至るところ g に収束する $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列が存在することを示せ．

(4) $1 \leq p < \infty$ とし，X は σ 有限（すなわち $\mathcal{A}$ 可測集合の広義増大列 $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ で，$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ かつ任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $\mu(E_i) < \infty$ となるものが存在する）とする．さらに，$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - g|^p d\mu = 0$ とする．このとき，μ に関してほとんど至るところ g に収束する $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列が存在することを示せ．

[8]　整数 $p \geq 2$, および $0 \leq q \leq p-2$ を満たす整数 q に対して，$\mathbb{C}$ 上の有理関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{z^q}{1+z^p}$$

と定める．$[0,\infty)$ 上の広義積分 I を次で定める．

$$I = \int_0^\infty f(x)dx$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $R>1$ に対して，複素数平面上の以下の閉曲線 C_R を反時計回りに向きづける．

$$C_R = [0,R] \cup \left\{ Re^{i\theta} \,\middle|\, 0 \leq \theta \leq \frac{2}{p}\pi \right\} \cup \left\{ re^{\frac{2}{p}\pi i} \,\middle|\, 0 \leq r \leq R \right\}$$

このとき，$\displaystyle\int_{C_R} f(z)dz$ を求めよ．

(2) I の値を求めよ．

(3) 変数変換 $t = \dfrac{1}{1+x^p}$ をすることによって，I をベータ関数を用いて表せ．ただし，ベータ関数は $a,b>0$ に対し $B(a,b) = \displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$ で定義される．

(4) $0<\lambda<1$ のとき $\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda)$ を求めよ．ただし，ガンマ関数は $c>0$ に対し $\Gamma(c) = \displaystyle\int_0^\infty t^{c-1}e^{-t}dt$ で定義される．

[9] $(0,\infty)$ 上で定義された実数値関数 $y=y(x)$ に対する微分方程式

$$(*) \qquad y'(x)=\frac{y(x)^2}{x}+\left(\lambda+\frac{1}{x}\right)y(x)+\mu x$$

を考える．ただし，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ は定数とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) y を $(*)$ の解とし，関数 $z=z(x)$ を $yz=-xz'$ を満たすように定める．このとき，z はある定数係数微分方程式を満たす．その方程式の一般解を求めよ．

(2) (1) で求めた一般解 z に対して

$$\tilde{y}(x)=-x\frac{z'(x)}{z(x)}$$

と定める．ただし，$z(x)=0$ となる点 x では $\tilde{y}(x)=0$ とする．$\tilde{y}$ に対して，次の (i) と (ii) を満たす多項式 $P_{\lambda,\mu}(x)$ が存在するための λ,μ に関する必要十分条件を求め，そのときの $P_{\lambda,\mu}(x)$ を求めよ．

(i) $P_{\lambda,\mu}(x)$ は (1) で求めた関数 z の表示にあらわれる任意定数によらない．

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\tilde{y}(x)-P_{\lambda,\mu}(x)\right)=0$

[10] $0 < p < 1$，$n \in \mathbb{N}$ とする．確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で，各 X_k $(k = 1, \ldots, n)$ は以下の確率関数をもつとする．

$$P(X_k = m) = p(1-p)^{m-1} \quad (m \in \mathbb{N})$$

$X_1, \ldots, X_n$ に基づく p の最尤推定量を $\hat{p}$ とおく．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\hat{p}$ を求めよ．

(2) 次の不等式を示せ．

$$E\left[\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} X_k}\right] > \frac{1}{E[\sum_{k=1}^{n} X_k]}$$

(3) $\hat{p}$ が p の不偏推定量であるか否かを理由とともに答えよ．

[11] 以下の問に答えよ.

(1) 次の不等式を満たす整数 $x_1, x_2, \ldots, x_{10} \in \{0, 1\}$ が存在しないことを示せ.

$$2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 8x_5 + x_6 + 7x_7 + x_8 + 10x_9 + x_{10} \geq 33$$

$$50x_1 + 30x_2 + 61x_3 + 93x_4 + 20x_5 + 27x_6 + 40x_7 + 45x_8 + 10x_9 + 92x_{10} \leq 120$$

(2) 次の不等式を満たす非負の実数 x_1, x_2, x_3, x_4 が存在しないことを示せ.

$$7x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 < 15$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 4$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 \geq 5$$