九州大学大学院数理学府

2022 年度修士課程入学試験
基礎科目問題

注意 • 問題 [1][2][3][4] のすべてに解答せよ．

• 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] 以下の問に答えよ．

(1) n を自然数，$a_{ij}(x)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ を $\mathbb{R}$ 上の可微分関数とするとき，次の等式を示せ．

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \ldots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \ldots & a'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \ldots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

(2) $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ が $(n-1)$ 次以下の多項式ならば，

$$\begin{vmatrix} p_1(x) & p_2(x) & \ldots & p_n(x) \\ p'_1(x) & p'_2(x) & \ldots & p'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^{(n-1)}(x) & p_2^{(n-1)}(x) & \ldots & p_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

は定数関数であることを示せ．ここで，$p_i^{(k)}(x)$ は $p_i(x)$ の k 階導関数である．

(3) $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ を次の多項式とする．

$$p_1(x) = x^3 + x^2 + 1,\ p_2(x) = x^2 + 3,\ p_3(x) = 2x^3 + 5,\ p_4(x) = 3x + 2.$$

このとき，

$$\begin{vmatrix} p_1(x) & p_2(x) & p_3(x) & p_4(x) \\ p'_1(x) & p'_2(x) & p'_3(x) & p'_4(x) \\ p''_1(x) & p''_2(x) & p''_3(x) & p''_4(x) \\ p'''_1(x) & p'''_2(x) & p'''_3(x) & p'''_4(x) \end{vmatrix}$$

を求めよ．

[2] n を 2 以上の自然数とする．$M_n(\mathbb{C})$ を，複素数を成分とする n 次正方行列全体からなる集合とし，I_n を n 次単位行列とする．このとき，以下の行列 A, B, C について，それらが対角化可能かどうかを決定せよ．

(1) ある 2 以上の自然数 m に対して $A^m = A$ を満たすような $A \in M_n(\mathbb{C})$.

(2) ある $\mathbf{0}$ でない $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ に対し，$B^k\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ $(1 \leq k \leq n-1)$ かつ $B^n\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たすような $B \in M_n(\mathbb{C})$.

(3) $D = C^2 + 2C + 2I_n$ が対角化可能かつ，D が 1 を固有値に持たないような $C \in M_n(\mathbb{C})$.

[3] 定数 $\alpha \geq 0$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して，関数 $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$ を

$$f_n(x) = n^{\alpha} x^n (1-x)$$

で定める．以下の問に答えよ．

(1) 各点 $x \in [0,1]$ に対し，$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在することを示せ．

(2) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とする．関数列 $\{f_n\}$ が f に $[0,1]$ 上一様収束するための，α に関する必要十分条件を求めよ．

[4]　以下の問に答えよ．

(1) 次の広義積分が収束することを示せ．

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-x^4}}{x^4}\,dx.$$

(2) 次の二つの広義重積分 I_1, I_2 について，その収束・発散を判定せよ．

$$I_j = \iint_{D_j} e^{-x^4 y}\,dxdy \qquad (j=1,2).$$

ただし，D_1, D_2 は以下の集合とする．

$$D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 0\le x,\ 0\le y\le 1\},$$
$$D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 0\le x\le 1,\ 0\le y\}.$$