

九州大学大学院数理学府  
2023年度修士課程入学試験  
基礎科目問題

- 注意
- 問題 [1][2][3][4] のすべてに解答せよ.
  - 以下  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  は自然数の全体,  $\mathbb{Z}$  は整数の全体,  $\mathbb{Q}$  は有理数の全体,  $\mathbb{R}$  は実数の全体,  $\mathbb{C}$  は複素数の全体を表す.

[1]  $V = \mathbb{R}^7$ ,  $W$  を  $V$  の 3次元部分空間とし,  $f: V \rightarrow V$  を線形写像で  $\text{Im} f$  の次元が2であるものとする.  $W$  と  $f$  を動かすとき, 部分空間  $(W + \text{Im} f) \cap \text{Ker} f$  の次元の取りうる値を全て挙げよ.

[2]  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  とし, 線形写像  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  で定める.

また,  $\mathbb{R}^3$  の部分空間  $W$  を  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}$  の線形結合全体とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1)  $f(W) \subset W$  となるような  $\alpha$  を求めよ.

(2) (1) の  $\alpha$  に対して,  $f: W \rightarrow W$  とみなした場合の  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  に関する表現行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  を求めよ.

(3) (2) の  $a, b, c, d$  に対して,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$  となる正則行列  $P$  と実数  $\lambda$  を求めよ.

[3] 連続関数  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  に対して,  $\lim_{x \rightarrow +0} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt$  を求めよ.

[4]  $f_n(x) = \sum_{m=1}^n \frac{\sin(mx)}{m^2}$  ( $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ) に対して, 以下の問に答えよ.

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  が存在することを示せ.
- (2)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  は連続関数になることを示せ.
- (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \infty$  を示せ.