九州大学大学院数理学府

2022 年度修士課程入学試験
数学問題（ＭＭＡコース）

注意 ● 問題 [1][2][3][4][5][6] の中から 3 題を選択して解答せよ．

● 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 3 題分提出すること．

[1] 行列 A と B を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

で定める．以下の問に答えよ．

(1) A を対角化した行列 D と，$D = P^{-1}AP$ となる正則行列 P を求めよ．

(2) B が複素数の範囲に 3 個の異なる固有値を持つことを示せ．

(3) 要素が全て実数である 3 次正方行列 X で，$AX = XA$, $BX = XB$ を満たし，かつトレースが 3 であるものを全て求めよ．

[2] a を正の実数とし，$f(x)$ と $g(x)$ を実数値関数とする．また，任意の実数 x に対して $f(x) > 0$, $g(x) \neq 0$ が成り立つと仮定する．$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ かつ $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ のとき，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)^{g(x)} - 1}{g(x)} = \ln a$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\ln a$ は a の自然対数である．

[3] a を実数とし，実数値関数 $x(t)$ に対して以下の微分方程式を考える．

$$x''(t) - 2ax'(t) + (a^2 + a - 2)x(t) = 0. \tag{$\star$}$$

以下の問に答えよ．

(1) 微分方程式 $(\star)$ の一般解を求めよ．

(2) $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$ となる微分方程式 $(\star)$ の解 $x(t)$ が存在する a の条件，およびそのときの $t = 0$ における $x(t)$, $x'(t)$ の条件を求めよ．

[4]　勝つ確率が $\theta \in (0,1)$ のゲームを独立に繰り返し行うことを考える．初めて勝つまでに負けた回数をあらわす確率変数を X とし，さらに

$$Y = \cos\left(\frac{\pi X}{2}\right)$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) X の分布を求めよ．

(2) Y の分布を求めよ．

(3) Y の期待値を求めよ．

[5]　a を $0 < a < 1$ を満たす実数とし，複素関数 $f(z)$ を $f(z) = \dfrac{e^{az}}{1+e^{z}}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) R を正の実数とし，D を頂点 $-R,\ R,\ R+i2\pi,\ -R+i2\pi$ をもつ長方形とするとき，D の内部にある $f(z)$ の極，およびその点における留数を求めよ．ここで，i は虚数単位である．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ を求めよ．

[6]　$f(x), g(x)$ を $-\pi < x \leq \pi$ の範囲で以下のように定義される周期 2π の関数とする．

$$f(x) = x \quad (-\pi < x \leq \pi), \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x \leq 0) \\ x & (0 < x \leq \pi). \end{cases}$$

また，$f(x), g(x)$ のフーリエ級数展開をそれぞれ $F(x), G(x)$ とする．以下の問に答えよ．

(1)　$F(x), G(x)$ を求めよ．

(2)* $\displaystyle\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ を示せ．

(3)　$af(\pi) + g(\pi) = aF(\pi) + G(\pi)$ となる実数 a を求めよ．また，そのときの $af(x) + g(x)$ のグラフをかけ．

---

* 本小問については，訂正版を掲載しています．