九州大学大学院数理学府
2022 年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意

- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10][11] の中から 2 題を選択して解答せよ．
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること．
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1]　群 G の部分群 $D(G)$ を，G の部分集合 $\{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G\}$ で生成される群として定義する．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $D(G)$ は G の正規部分群となることを示せ．また，$G/D(G)$ が可換群となることを示せ．

(2) 3 次対称群 S_3 に対して，$D(S_3)$ は 3 次交代群 A_3 となることを示せ．

(3) 4 次対称群 S_4 に対して，$D(S_4)$ は 4 次交代群 A_4 となることを示せ．

[2]　D を単項イデアル整域とし，I_1, I_2 を D の自明でないイデアルとする．このとき，次の三つの条件は同値であることを示せ．

(i) $I_1 I_2 = I_1 \cap I_2$.

(ii) $I_1 + I_2 = D$.

(iii) 全ての D の元 a に対し，$a + I_1 I_2 \mapsto (a + I_1, a + I_2)$ で定義された自然な環の準同型写像 $\varphi : D/I_1 I_2 \to D/I_1 \times D/I_2$ は環の同型写像になる.

[3]　以下の行列 M, I の各成分は，それぞれ有限体 $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ の元とする．

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

以下の問に答えよ．

(1) c を $\mathbb{F}_5$ の元とする．$cI + M$ の固有多項式を求めよ．

(2) M が $\mathbb{F}_5$ に含まれない固有値を持つとする．このような $a \in \mathbb{F}_5$ を全て求めよ．

(3) $\mathbb{F}_{25}$ を $\mathbb{F}_5$ の 2 次拡大とし，写像 $\sigma : \mathbb{F}_{25} \to \mathbb{F}_{25}$ を，$\sigma(u) = u^5$ で定義する．

(3-1) σ は $\mathbb{F}_{25}$ の自己同型写像になることを示せ．

(3-2) $\mathbb{F}_{25}$ の元 u に対し，$\sigma(u) = u$ であることと，$u \in \mathbb{F}_5$ であることは同値であることを示せ．

(4) (2) で求めた各 a に対し，$(cI + M)^6 = I$ となる $c \in \mathbb{F}_5$ を全て求めよ．

[4] S を $\mathbb{R}^3$ 内の次の曲面とする.

$$\mathbf{p}(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \quad (0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 2\pi).$$

以下の問に答えよ.

(1) S の第一基本形式と第二基本形式を求めよ.

(2) S のガウス曲率 K と平均曲率 H を求めよ.

(3) S の面積を求めよ.

[5] T を $I^2 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ の境界において

$$(x,0) \sim (x,1) \quad (0 \le x \le 1),$$
$$(0,y) \sim (1,y) \quad (0 \le y \le 1)$$

と同一視して得られるトーラスとする．T の単体分割 S において，n 単体の個数を $a_n(S)$ で表す．以下の問に答えよ．

(1) T の整係数ホモロジー群 $H_k(T;\mathbb{Z})$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ およびオイラー標数 $\chi(T)$ を求めよ．

(2) $a_2(S)$ を $a_1(S)$ を用いて表せ．

(3) $2a_1(S) \le a_0(S)(a_0(S) - 1)$ を示せ．

(4) 単体の個数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(S)$ が最小となる S に対し，$a_n(S)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を求めよ．

[6]　2次元トーラス

$$T = \{((2+\cos\theta)\cos\phi, (2+\cos\theta)\sin\phi, \sin\theta) \mid \theta, \phi \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

を考える．ただし，T にはユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ から誘導される位相を入れる．また，開区間 $(-\pi, \pi)$ で定義された曲線 $c : (-\pi, \pi) \to T$ を $c(t) = (2+\cos t, 0, \sin t)$ で定め，関数 $f : T \to \mathbb{R}$ を $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$ で定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) T は C^∞ 級多様体であることを示せ．

(2) c は C^∞ 級曲線であることを示せ．

(3) f は C^∞ 級関数であることを示せ．

(4) 速度ベクトル $\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0}$ による関数 f の方向微分 $\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0}(f)$ を求めよ．

[7] $\mathbb{R}$ 上の関数を

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

で定義する．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\xi > 1$ のとき，次の級数が収束することを示せ．

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!)^2} \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi x} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} dx.$$

(2) $\xi > 1$ のとき，次の等式を示せ．

$$\int_0^{\infty} \xi e^{-\xi x} f(x)\, dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi x} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} dx.$$

(3) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{\xi \to \infty} \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi x} f(x)\, dx.$$

[8]　以下の問に答えよ．

(1) ある定数 A が存在し，任意の $R \geq 4$ に対し不等式

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^3 e^{iz}}{z^4+16} \, dz \right| \leq \frac{A}{R}$$

が成り立つことを示せ．ただし，積分路は $C_R = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, \ \mathrm{Im}\, z \geq 0 \}$ で，向きは $z = R$ から $z = -R$ で考える．

(2) 次の広義積分を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin x}{x^4+16} \, dx.$$

[9] $\varepsilon \geq 0$ として，$x(t), y(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ を次の微分方程式系の解とする．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = x(t) + y(t) - \varepsilon\, x(t)\bigl(x(t)^2 + y(t)^2\bigr), \\ \\ \dfrac{dy}{dt}(t) = -x(t) + y(t) - \varepsilon\, y(t)\bigl(x(t)^2 + y(t)^2\bigr). \end{cases}$$

$x(0)^2 + y(0)^2 \neq 0$ と仮定する．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\varepsilon = 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}(x(t)^2 + y(t)^2) = \infty$ を示せ．

(2) $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ とおく．$r(t)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(3) $\varepsilon > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}(x(t)^2 + y(t)^2) = \frac{1}{\varepsilon}$ を示せ．

[10] 独立な確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ が全て区間 $(\theta,\, 2\theta)$ 上の一様分布（ただし $\theta > 0$）に従っているとし，正数 α_n および β_n に対して，以下の二種類の確率変数を考える．

$$\widetilde{\theta}_n = \alpha_n \overline{X}_n, \qquad \widehat{\theta}_n = \beta_n \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

ただし，$\overline{X}_n$ は $X_1, \ldots, X_n$ の標本平均を表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\widetilde{\theta}_n$ が θ の不偏推定量となるように α_n を定めよ．

(2) $\max\{X_1, \ldots, X_n\}$ の密度関数を求めよ．

(3) $\widehat{\theta}_n$ が θ の不偏推定量となるように β_n を定めよ．

(4) (1), (3) で定めた α_n と β_n に対して，相対効率 $\dfrac{\mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta}_n)}{\mathrm{Var}_\theta(\widetilde{\theta}_n)}$ を求めよ．

[11] 関数 $x(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

の差分近似について考える．一定の差分間隔を h, 離散点 $t_i = ih\ (i = 0, 1, 2, \ldots)$ での x の値を x_i と書くとき，

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + hf(x_i), \\ x_{i+1} &= x_i + hf(x_{i+1}), \\ x_{i+1} &= x_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}f(x_i)\right) \end{aligned}$$

をそれぞれ，前進オイラー法，後退オイラー法，2 次のルンゲ・クッタ法とよぶ．ただし，$h > 0$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -ax \quad (a \text{ は正の定数}) \tag{$\star$}$$

の初期値問題を前進オイラー法によって解くとき，近似解が厳密解に収束するための条件，さらに単調に収束するための条件をそれぞれ求めよ．

(2) 微分方程式 $(\star)$ の初期値問題を後退オイラー法によって解くとき，h の値によらず，近似解は厳密解に単調に収束することを証明せよ．

(3) 微分方程式 $(\star)$ の初期値問題を 2 次のルンゲ・クッタ法によって有限区間 $[0, T]$ にわたって解くとき，近似解と厳密解の誤差が $O(h^2)$ であることを証明せよ．

(4) 微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2$$

の初期値問題を，初期条件 $x(0) = x_0$ のもとで前進オイラー法によって解くとき，近似解が厳密解に収束するための条件，さらに単調に収束するための条件をそれぞれ求めよ．ただし，$0 < x_0 < \dfrac{h+1}{h}$ とする．