九州大学大学院数理学府
2023 年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意

- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10][11] の中から 2 題を選択して解答せよ．
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること．
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1]　$\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ を正則な2次実行列全体のなす群とする．次の2つの行列

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ の部分群を G とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 群 G の位数を求めよ．

(2) 群 G の中心 Z を求めよ．

(3) 3次対称群と2次対称群の直積群は群 G と同型になるかどうか，理由とともに答えよ．

[2] 可換環 R のイデアル $I\ (\neq R)$ が準素イデアルであるとは，$a, b \in R$ について，$ab \in I$ かつ $a \notin I$ であれば，$b^k \in I$ となる $k \in \mathbb{N}$ が存在することであると定義する．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 極大イデアルは準素イデアルであることを示せ．

(2) R を整域とし，I を R の単項な素イデアルであるとする．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，I^n は準素イデアルであることを示せ．

[3] 位数 3 の有限体 $\mathbb{F}_3$ とその 2 次拡大体 $\mathbb{F}_{3^2}$ に対し,

$$V_i = \{(x, y) \in (\mathbb{F}_{3^i})^2 \mid y^2 = x^3 + x + 1\} \qquad (i = 1,\, 2)$$

と定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 解集合 V_1, V_2 を求めよ．

(2) 以下の条件 (i), (ii) を満たす $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が存在することを示せ．

(i) $|\alpha| = |\beta| = \sqrt{3},\ \alpha\beta = 3.$

(ii) $\#V_i = 3^i - (\alpha^i + \beta^i) \qquad (i = 1,\, 2).$

ここで $\#V_i$ は集合 V_i の元の個数を表す．

[4]　3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内で以下の曲面を考える．

$$p(u,v) = \big(f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u)\big) \qquad (u, v \in \mathbb{R})$$

ただし，f, g は C^∞ 級関数であり，さらに $f(u) > 0$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 曲面 $p(u,v)$ の第一基本形式，第二基本形式，平均曲率，ガウス曲率を求めよ．

(2) $p(u,v)$ の定義において $f(u) = 1$, $g(u) = u$ の場合の曲面を S とするとき，平面 $\mathbb{R}^2$ から S への局所等長写像の例を構成せよ．

ただし，2つの曲面 S_1, S_2 に対し，写像 $\varphi : S_1 \to S_2$ が局所等長写像であるとは，S_1 の任意の点に対し，その近傍 U で，φ の U への制限が等長写像となるものが存在することであると定義する．ここで，S_1 上の任意の曲線 c とその像 $\varphi(c)$ の長さが常に等しいとき $\varphi : S_1 \to S_2$ を等長写像と呼ぶ．

(3) $p(u,v)$ の定義において $f(u) = \sqrt{u^2 + a^2}$, $g(u) = a \sinh^{-1} \dfrac{u}{a}$ $(a > 0)$ の場合の曲面を M とするとき，平面 $\mathbb{R}^2$ から M への局所等長写像が存在するかどうか，理由とともに答えよ．

[5]　3次元球面 $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ に対し，その部分位相空間 X, Y を以下で定める．

$$X = \left\{ (z_1, z_2) \in S^3 \;\middle|\; |z_1| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

$$Y = \left\{ (z_1, z_2) \in S^3 \;\middle|\; |z_1| \geq \frac{1}{2} \right\}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) X は $D \times S^1$ と同相であることを示せ．ただし，$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, S^1 は D の境界 ∂D とする．

(2) X は Y と同相であることを示せ．

(3) Y およびその境界 ∂Y の整係数ホモロジー群を求めよ．

[6] 3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分位相空間 M を以下で定める.

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (\sqrt{x^2+y^2}-3)^2 + z^2 = 1\right\}$$

このとき，以下の問に答えよ.

(1) M はコンパクトなハウスドルフ空間であることを示せ.

(2) M は 2 次元微分可能多様体であることを示せ.

(3) 以下の写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ が M へのはめ込みであることを示せ.

$$f(u, v) = \big((3+\sin u)\cos v,\ (3+\sin u)\sin v,\ \cos u\big)$$

[7]　区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 $f(t), p(t), q(t)$ に対し，以下の微分方程式の境界値問題を考える．

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t) \tag{DE1}$$

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{DE2}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ および

$$\varphi''(t) + p(t)\varphi'(t) + q(t)\varphi(t) = 0 \tag{$*$}$$

を満たすものは自明解 $\varphi(t) = 0$ のみであるとする．このとき，(DE1) かつ (DE2) の解が存在するならば，一意であることを示せ．

(2) $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ を，$(*)$ および条件

$$\begin{cases} \varphi_1(a) = 0 \\ \varphi_1'(a) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_2(b) = 0 \\ \varphi_2'(b) = 1 \end{cases}$$

を満たすものとする．また，条件

$$\begin{cases} C_1'(t)\varphi_1(t) + C_2'(t)\varphi_2(t) = 0 \\ C_1(b) = C_2(a) = 0 \end{cases}$$

を満たす $C_1(t)$, $C_2(t)$ に対して，$u(t)$ を

$$u(t) = C_1(t)\varphi_1(t) + C_2(t)\varphi_2(t)$$

とおく．このとき，$u(t)$ が (DE1) を満たせば，以下が成り立つことを示せ．

$$C_1'(t)\varphi_1'(t) + C_2'(t)\varphi_2'(t) = f(t)$$

(3) (DE1) および (DE2) を満たす $u(t)$ を，$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_1'(t), \varphi_2'(t)$ と $f(t)$ を用いて表せ．

[8]　複素関数 $f(z)$ を次で定める．

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ として，$a_n + ia_n$, $-a_n + ia_n$, $-a_n - ia_n$, $a_n - ia_n$ を頂点とする正方形の周を反時計回りに回る曲線を C_n とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $z \neq \pm n\pi$ かつ $z \notin \mathrm{C}_n$ のとき，以下を示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{C}_n} \frac{f(w)}{w(w-z)} dw = 0$$

(2) 次の等式を示せ．

$$f(z) = 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2\pi^2}$$

[9]　正の実数 s に対し，以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n/2}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}dt$ が収束することを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{2n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}dt$ が収束する s の範囲を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^s\Gamma(n)}{\Gamma(n+s)}$ が収束することを示し，その値を求めよ．

ただし，$\displaystyle\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt\ (x>0)$ とする．

[10] $0 < \theta < 1, n \in \mathbb{N}$ とする．確率変数 X が

$$P_\theta[X = 1] = \theta, \qquad P_\theta[X = -1] = 1 - \theta$$

なる分布に従うとし，X と同じ分布に従う独立な確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ と非負の実数 a に対して

$$\delta_a = \frac{1}{2n + 4a}\left(n + 2a + \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

とおく．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $(\delta_a - \theta)^2$ の期待値 $E_\theta[(\delta_a - \theta)^2]$ を求めよ．

(2) $E_\theta[(\delta_a - \theta)^2]$ が θ によらず一定となるような a を求めよ．

(3) $X_1, \ldots, X_n$ に基づく θ の最尤推定量 $\hat{\theta}$, および $E_\theta[(\hat{\theta} - \theta)^2]$ を求めよ．

[11]　1から3までの数字からなる長さ有限の文字列 $a = a_1 a_2 \cdots a_n \in \{1,2,3\}^n$（$0 \leq n < \infty$）に対して，以下のアルゴリズムで定まる操作 F を考える．

```
FUNCTION F(a) (where a = a_1 a_2 ··· a_n ∈ {1,2,3}^n)
k ← 1
while k ≤ n − 1 do
  if a_k a_{k+1} = 11 or a_k a_{k+1} = 22 or a_k a_{k+1} = 33 then
    return a_1 a_2 ··· a_{k−1} a_{k+2} ··· a_n
  else if k ≤ n − 2 and a_k a_{k+1} a_{k+2} = 212 then
    return a_1 a_2 ··· a_{k−1} 121 a_{k+3} ··· a_n
  else if k ≤ n − 2 and a_k a_{k+1} a_{k+2} = 323 then
    return a_1 a_2 ··· a_{k−1} 232 a_{k+3} ··· a_n
  else if a_k a_{k+1} = 13 then
    return a_1 a_2 ··· a_{k−1} 31 a_{k+2} ··· a_n
  end if
  k ← k + 1
end while
return a
```

また，$F(a) = a$ となる文字列 a のことを不動点と呼ぶ．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 文字列 $a = 323123122$ について，a から始めて操作 F を4回行って得られる文字列 $F(F(F(F(a))))$ を求めよ．

(2) 任意の文字列 $a \in \{1,2,3\}^n$（$0 \leq n < \infty$）に対して，a から始めて操作 F を有限回行うことで不動点に到達することを証明せよ．

(3) $n \geq 0$ について，長さ n の不動点 $a \in \{1,2,3\}^n$ の個数 $P(n)$ を求めよ．