2021年度

九州大学理学部数学科第３年次編入学試験問題

注意事項

(1)　試験開始の合図があるまで，問題冊子の中を見てはいけません.

(2)　問題は4問あります.

(3)　「解答はじめ」の合図があったら問題冊子を開き，不足等に気づいた場合は手をあげて監督者に知らせてください.

(4)　試験開始後，各解答用紙に，受験番号，氏名を記入してください.

(5)　解答用紙の表に書ききれない場合は，裏に続けて書いてください．それでも不足するときは，手をあげて監督者に申し出て追加の解答用紙を受取り，問題番号-解答続き番号(2から始まる)，受験番号，氏名を記入してください.

(6)　試験終了後，解答用紙は，解答の記入のあるなしにかかわらず，すべて提出してください．問題冊子は持ち帰ってください.

九州大学理学部数学科

(1 枚白紙：計算用紙として利用できます)

以下の [2], [4] では $\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする．

[1]

$a \geq 0$ として，行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．
(2) $a = 4$ のとき，A の各固有値に対する固有空間を求めよ．
(3) A が対角化可能でないような a の値をすべて求めよ．

[2]

以下の問いに答えよ.

(1) 次の広義積分は収束することを示せ.

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\,dx.$$

(2) $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y \leq 1\}$ として，次の広義積分の収束・発散を調べよ.

$$I_1 = \iint_{D_1} e^{-x^2 y}\,dxdy.$$

(3) $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y\}$ として，次の広義積分の収束・発散を調べよ.

$$I_2 = \iint_{D_2} e^{-x^2 y}\,dxdy.$$

[3]

A, B, Q を n 次実正方行列とし，A は正則行列で Q は対称行列であるとする．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，必要ならば，実対称行列は実直交行列により対角化可能であることを証明なしで用いてよい．

(1) BA を AB, A, A^{-1} の積で表せ．

(2) BA がある正則行列により対角行列 D に対角化可能ならば，AB も D に対角化可能であることを示せ．

(3) $A = Q^2$ かつ B が対称行列であるとき，AB は対角化可能で，かつその固有値はすべて実数であることを示せ．

(4) A は固有値がすべて正である対称行列で，B は対称行列であるとする．このとき，AB は対角化可能で，かつその固有値はすべて実数であることを示せ．

[4]

$a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ とする．点 $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, y_1)$ は円 $C_1 = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + y_1^2 = 1\}$ 上を動き，点 $\boldsymbol{x}_2 = (x_2, y_2)$ は円 $C_2 = \{(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_2 - a)^2 + y_2^2 = r^2\}$ 上を動くものとする．2 点 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ 間のユークリッド距離に関する極値問題について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数

$$f(\theta_1, \theta_2) = (r\cos\theta_2 + a - \cos\theta_1)^2 + (r\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2, \quad (\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$$

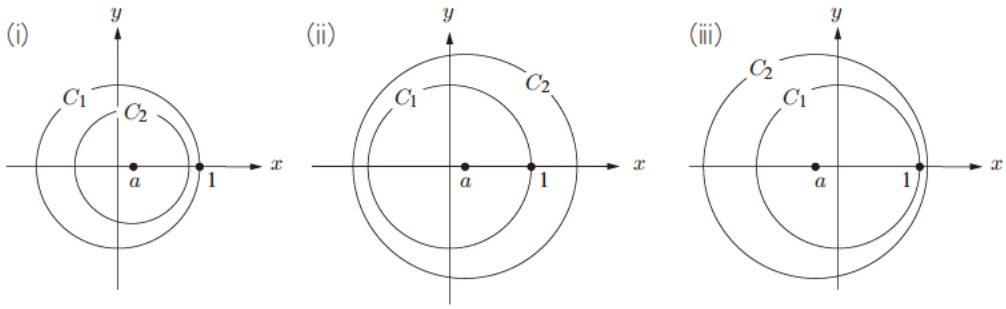
の $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ におけるヘッセ行列

$$H = \begin{pmatrix} f_{\theta_1\theta_1}(0,0) & f_{\theta_1\theta_2}(0,0) \\ f_{\theta_2\theta_1}(0,0) & f_{\theta_2\theta_2}(0,0) \end{pmatrix}$$

を求めよ．

(2) (1) で求めたヘッセ行列が正定値になるための条件を a と r で表せ．

(3) 図 (i) (ii) (iii) それぞれについて，点 $\boldsymbol{x}_1^* = (1, 0)$, $\boldsymbol{x}_2^* = (a + r, 0)$ が極値問題の極小解であるかどうかを判定せよ．



(1 枚白紙：計算用紙として利用できます)