# 2022年度

# 九州大学理学部数学科第３年次編入学
# 試験問題

## 注意事項

(1)　試験開始の合図があるまで, 問題冊子の中を見てはいけません.

(2)　問題は４問あります.

(3)　「解答はじめ」の合図があったら問題冊子を開き，不足等に気づいた場合は手をあげて監督者に知らせてください.

(4)　試験開始後，各解答用紙に，受験番号，氏名を記入してください.

(5)　解答用紙の表に書ききれない場合は，裏に続けて書いてください．それでも不足するときは，手をあげて監督者に申し出て追加の解答用紙を受取り，問題番号-解答続き番号 (２から始まる), 受験番号，氏名を記入してください.

(6)　試験終了後，解答用紙は，解答の記入のあるなしにかかわらず，すべて提出してください．問題冊子は持ち帰ってください.

九州大学理学部数学科

(１枚白紙：計算用紙として利用できます)

## [1]

以下の問に答えよ.

(1) 単位円 (原点中心の半径 $1$ の円) に内接する二等辺三角形のうち，面積最大のものは正三角形であることを示せ.

(2) 単位円に内接する三角形のうち，面積最大のものは正三角形であることを示せ.

## [2]

実数全体からなる集合 $\mathbb{R}$ に対し，以下の問に答えよ．

(1) 次の写像 $f$ は線形写像であることを示せ．

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathrm{Ker}\, f$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示し，$\mathrm{Ker}\, f$ の基底を 1 組求めよ．さらに $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ．

ただし

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$$

である．

(3) $\mathrm{Im}\, f$ は $\mathbb{R}^2$ の部分空間であることを示し，$\mathrm{Im}\, f$ の基底を 1 組求めよ．さらに $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ．

ただし

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$$

である．

## [3]

実数 $a \geqq b \geqq c > 0$ に対し

$$\begin{aligned} A(a,b,c) &= \frac{a+b+c}{3} \\ B(a,b,c) &= \sqrt[3]{abc} \\ C(a,b,c) &= \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \end{aligned}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$A(a,b,c) \geqq B(a,b,c)$$

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$B(a,b,c) \geqq C(a,b,c)$$

(3) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c$$

$$a_{n+1} = A(a_n, b_n, c_n), \quad b_{n+1} = B(a_n, b_n, c_n), \quad c_{n+1} = C(a_n, b_n, c_n), \quad (n \geqq 1)$$

によって定義する．$\{a_n\}$ は (広義) 単調減少数列であることを示せ．また $\{c_n\}$ は (広義) 単調増加数列であることを示せ.

(4) (3) の数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ は同じ極限値に収束することを示せ.

## [4]

$n$ 次正方行列 $A$ の固有値 $\lambda$ の固有空間の次元を $e_\lambda(A)$, 特性方程式 $\Phi_A(x) = \det(xE_n - A) = 0$ の解 $\lambda$ の重複度を $m_\lambda(A)$ でそれぞれ表す．$e_\lambda(A) \leqq m_\lambda(A)$ であることが知られている．以下の問に答えよ．

(1) $S$ を $n$ 次対称行列，$\lambda$ をその固有値とするとき，$e_\lambda(S) = m_\lambda(S)$ であることを示せ．

(2) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の全ての固有値と，対応する固有空間の次元を求めよ．

(3) 実数 $a$ に対し，対称行列 $S(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ とおく．このとき ${}^tPS(a)P$ が対角行列となる直交行列 $P$ を求めよ．ただし，${}^tP$ は $P$ の転置行列である．

( 1 枚白紙：計算用紙として利用できます)