

2023年度

九州大学理学部数学科第3年次編入学 試験問題

注意事項

- (1) 試験開始の合図があるまで、問題冊子の中を見てはいけません。
- (2) 問題は4問あります。
- (3) 「解答はじめ」の合図があったら問題冊子を開き、不足等に気づいた場合は手をあげて監督者に知らせてください。
- (4) 試験開始後、各解答用紙に、受験番号、氏名を記入してください。
- (5) 解答用紙の表に書ききれない場合は、裏に続けて書いてください。それでも不足するときは、手をあげて監督者に申し出て追加の解答用紙を受取り、問題番号-解答続き番号(2から始まる)、受験番号、氏名を記入してください。
- (6) 試験終了後、解答用紙は、解答の記入のあるなしにかかわらず、すべて提出してください。問題冊子は持ち帰ってください。

九州大学理学部数学科

(1 枚白紙：計算用紙として利用できます)

[1] u, p, q を正の実数とし,

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1} e^{-x} dx, \quad B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

とする. 以下の問に答えよ.

(1) 写像 φ を

$$\varphi: (0, \infty) \times (0, 1) \rightarrow (0, \infty) \times (0, \infty), \quad (s, t) \mapsto (st, s(1-t))$$

によって定義する. φ が全単射 (1 対 1 かつ上への写像) であることを示せ.

(2) φ のヤコビ行列式を求めよ.

(3) 変数変換 $x = st, y = s(1-t)$ を用いて, 以下が成り立つことを示せ.

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = \Gamma(p+q) B(p, q).$$

[2] xt 平面において, 2 変数関数 $u(x, t)$ が全微分可能で, 常に $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \neq 0$ を満たすものとする. 以下の問に答えよ.

(1) xt 平面において u が関係式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (*)$$

を満たしている場合を考える. xt 平面内の C^1 級の曲線 $C: x = f(t)$ 上で $u(x, t)$ が一定であるならば, C は直線であることを示せ.

(2) F を, その導関数が常に正である 1 変数 C^1 級関数とする. $u(x, t)$ が $t > 0$ で

$$u(x, t) = F(x - u(x, t)t)$$

という式を満たすとき, $t > 0$ では上の関係式 $(*)$ が満たされることを示せ.

[3] 3次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して, それらの内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と書く. また $\boldsymbol{x}$ のノルムを $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ とする. 単位ベクトル $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1, v_2, v_3)$ を固定し, 写像

$$f_{\boldsymbol{v}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{v}$$

を定義する. 以下の問に答えよ.

- (1) $f_{\boldsymbol{v}}$ は線形写像であることを示せ.
- (2) $f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を $\boldsymbol{v}$ を用いて表せ.
- (3) (2) の A は直交行列であることを示せ.
- (4) 互いに平行でない単位ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ に対し, 集合

$$V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f_{\boldsymbol{u}}(f_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}\}$$

を定義する. V は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ. また V の次元を求めよ.

[4] a を実数とする. 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 & 0 \\ a & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & a \\ 0 & 0 & a & 3 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問に答えよ.

- (1) A の固有値がすべて 0 以上となる a の範囲を求めよ.
- (2) A の最小固有値が 0 かつ $a \geq 0$ である時, A の固有値と固有空間を全て求めよ.

(1 枚白紙：計算用紙として利用できます)