九州大学大学院数理学府
2024年度修士課程入学試験
数学問題（ＭＭＡコース）

注意 • 問題 [1][2][3][4][5][6] の中から 3 題を選択して解答せよ.

• 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 3 題分提出すること.

• 以下，$\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体を表し，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] $a \in \mathbb{R}$ とし $A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{pmatrix}$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値が 3，-3，-3 となるような a を選ぶ．このとき，直交行列を用いて A を対角化せよ．

[2] $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を次で定める．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ の値を求めよ．

(2) f が C^1 級であることを示せ．

(3) f が C^2 級ではないことを示せ．

[3]　a を正の実数とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $x(t)$ に対する微分方程式

$$x'' - 2ax' + x = 0$$

の実数の一般解を求めよ．

(2) $x(t)$ に対する微分方程式

$$x'' - 2ax' + x = e^{at}$$

の実数の一般解を求めよ．

[4] $[0,\infty)$ 上の実数値関数 $f(t)$ に対し，ラプラス変換 $\mathcal{L}\left[f(t)\right]$ を

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

で定める．以下を満たす $[0,\infty)$ 上の実数値関数列 $\{y_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ を考える．

$$y_{n+1}(t) = e^{\frac{t}{2}} y_n\left(\frac{t}{2}\right)$$

$Y_n = \mathcal{L}\left[y_n(t)\right]$ とおく．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $y_1(t) = e^t$ のとき $y_n(t)$ を求めよ．

(2) Y_{n+1} と Y_n の関係式を求めよ．

(3) $Y_1(s) = \dfrac{1}{s}$ のとき，$Y = \lim_{n\to\infty} Y_n$ を求め，さらに $\mathcal{L}\left[g(t)\right] = Y$ となる $g(t)$ を求めよ．

[5]　c を正の定数とする．実数値確率変数 X は，以下の確率密度関数をもつとする．

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-2x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) 定数 c の値を求めよ．

(2) X の期待値および分散を求めよ．

(3) 実数 x に対して，$\lfloor x \rfloor$ で x 以下の最大の整数を表す．これを用いて離散型確率変数 Y を

$$Y = \begin{cases} \lfloor X \rfloor & (X \geq 0) \\ 0 & (X < 0) \end{cases}$$

と定めるとき，Y の期待値を求めよ．

[6] 以下の問に答えよ．ただし，i を虚数単位とする．

(1) 正の実数 R に対して，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}dt \leq \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R})$$

が成り立つことを示せ．

(2) 複素関数

$$f(z) = \frac{z^2 e^{2iz}}{z^4+1}$$

の $z = e^{\frac{\pi}{4}i}$ における留数を求めよ．

(3) 広義積分

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2(\sin(2x)+e^{-2x})}{x^4+1}dx$$

を求めよ．