ゼータで素数を数える

Ade Irma Suriajaya / アデ イルマ スリアジャヤ (チャチャ)

九州大学大学院数理学研究院 准教授
兼
理化学研究所 iTHEMS 客員研究員

九州大学　公開講座
2024 年 8 月 8 日

（一意的）素因数分解

素数とは 1 と自分自身でしか割り切れない 2 以上の整数。

$1 = 1$	$16 = 2^4$	$753 = 3 \times 251$
$2 = 2^1$	$17 = 17^1$	$\cdots$
$3 = 3^1$	$18 = 2 \times 3^2$	$1\,252 = 2^2 \times 313$
$4 = 2^2$	$19 = 19^1$	$\cdots$
$5 = 5^1$	$20 = 2^2 \times 5$	$38\,709 = 3^2 \times 11 \times 17 \times 23$
$6 = 2 \times 3$	$21 = 3 \times 7$	$\cdots$
$7 = 7^1$	$22 = 2 \times 11$	$43\,390 = 2 \times 5 \times 4339$
$8 = 2^3$	$23 = 23^1$	$43\,391 = 43391^1$
$9 = 3^2$	$24 = 2^3 \times 3$	$43\,392 = 2^7 \times 3 \times 113$
$10 = 2 \times 5$	$\cdots$	$\cdots$
$11 = 11^1$		
$12 = 2^2 \times 3$		
$13 = 13^1$	$101 = 101^1$	
$14 = 2 \times 7$	$102 = 2 \times 3 \times 17$	$2\,517\,678 = 2 \times 29 \times 43391$
$15 = 3 \times 5$	$\cdots$	$\cdots$
		$\cdots$

素数を数える

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223	
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281	
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433	
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659	
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827	
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911	
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997	...

4 で割って 3 と 1 余る素数

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223	
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281	
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433	
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659	
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827	
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911	
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997	…

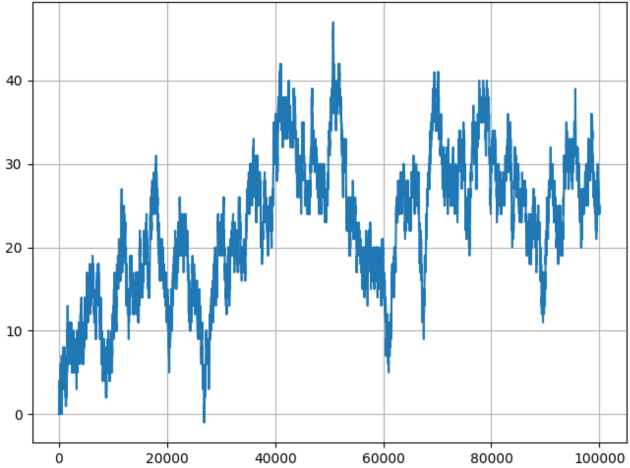
素数のレース (競走)　mod 4

x	4 で割って 3 余る素数の数	4 で割って 1 余る素数の数
100	13	11
200	24	21
500	50	44
1 000	87	80
3 000	218	211
5 000	339	329
10 000	619	609
20 000	1 136	1 125
26 861	1 472	1 473
26 863	1 473	1 473
50 000	2 583	2 549
100 000	4 808	4 783
616 841	25 188	25 189
633 798	25 810	25 811
1 000 000	39 322	39 175

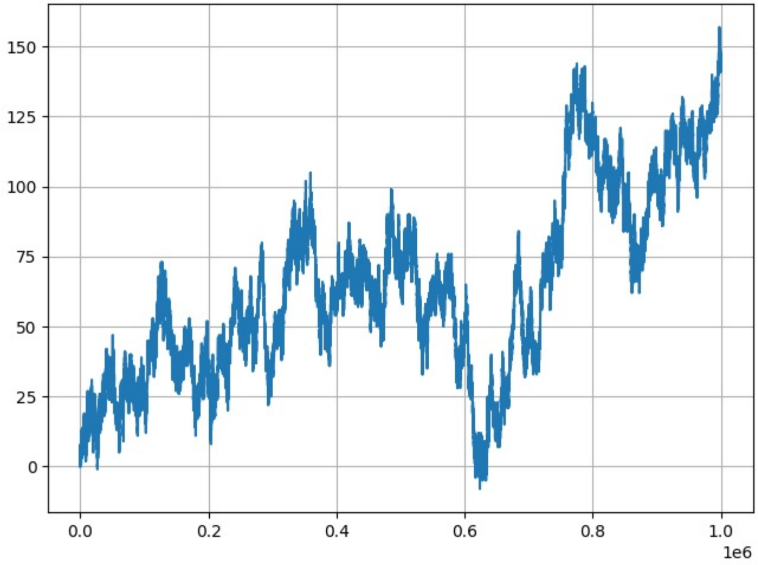
4で割って3余る素数と1余る素数の個数の差

$$\pi(x;4,3) := 4\text{ で割って }3\text{ 余る }x\text{ 以下の素数の個数}$$
$$\pi(x;4,1) := 4\text{ で割って }1\text{ 余る }x\text{ 以下の素数の個数}$$

$1 \le x \le 10^5$ に対して、$\pi(x;4,3) - \pi(x;4,1)$ のグラフ：



4で割って3と1余る素数の個数の差 — $x = 10^6$ まで



素数のレース (競走) mod 3

x	3 で割って 2 余る素数の数	3 で割って 1 余る素数の数
100	13	11
200	24	21
500	49	45
1000	87	80
3000	222	207
5000	338	330
10 000	617	611
30 000	1 634	1 610
50 000	2 576	2 556
100 000	4 807	4 784
500 000	20 804	20 733
800 000	32 032	31 918
1 000 000	39 266	39 231
10 000 000	332 384	332 194

チェビシェフの偏り

$x \geq 2$ までの素数を 4（又は 3）で割って、余りによって分類するとき、“ほとんど”の場合は、

- 4 で割って 3 余る素数が 4 で割って 1 余る素数より多く、

同様に、

- 3 で割って 2 余る素数が 3 で割って 1 余る素数より多い

傾向にある。

実際、前者が 99.59% の場合に成立し、後者は 99.9%！

一方、

- 4 で割って 3 余る素数が 4 で割って 1 余る素数より少ない、
- 3 で割って 2 余る素数が 3 で割って 1 余る素数より少ない

ような場合も無限に存在する。

↑ **午後の部にもう少し触れよ♪**

999 までの素数

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223	
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281	
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433	
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659	
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827	
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911	
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997	...

隣り合う素数（双子素数）

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

...

双子素数の予想

問題：双子素数組 $(p, p+2)$ は無限個あるか？

Y. Zhang (2014 年): $|p_1 - p_2| \leq 70\,000\,000$ を満たす素数の組み (p_1, p_2) は無限に存在する。

J. Maynard (2015 年): ←-- 2022 年フィールズ賞受賞者

- $|p_1 - p_2| \leq 600$ を満たす素数組み (p_1, p_2) は無限にある。
- 条件付きで、$|p_1 - p_2| \leq 12$ を満たす素数の組み (p_1, p_2) が無限に存在する。

D.H.J. Polymath (2014 年): ←-- 2006 年フィールズ賞受賞者 Tao が中心

- $\exists^\infty$ 素数組み (p_1, p_2) s.t. $|p_1 - p_2| \leq 246.$
- 条件付きで、$\exists^\infty$ 素数組み (p_1, p_2) s.t. $|p_1 - p_2| \leq 6.$

双子素数の予想が成立 $\Leftrightarrow$ $\exists^\infty$素数組 (p_1, p_2) s.t. $|p_1 - p_2| = 2$

$\rightsquigarrow$ **未解決問題**

素数の判定、素因数分解の難しさ

- 710 717 007 017 は素数？
- 318 036 411 は素数？
- 103 307 と 103 357 の間に素数はいくつあるか？

素数の分布

疑問 1. 素数はどう分布するのか？

疑問 2. 素数はどれくらい多いか？

本講義のテーマ：素数の分布の解析方法

素数の無限性

Euclid (大凡紀元前 300 年): 素数は無限個ある。

$\because$ 背理法で示す。素数は有限個しかないとすると：
ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_N$ だけが素数である。

自然数 $n = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_N + 1$ を考えると、$n \neq p_1$, $n \neq p_2$, $n \neq p_3$, ..., $n \neq p_N$ なので、n は素数ではない。よって、n を割り切る素数 p が存在すべき！

$p_1 \nmid n$, $p_2 \nmid n$, $p_3 \nmid n$, ..., $p_N \nmid n$（n は p_1 でも、p_2 でも、$p_3, \ldots, p_N$ でも割り切れない）なので、全ての $i = 1, 2, \ldots, N$ に対して、$p_i \neq p$ であり、p は素数であるので、素数は $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_N$ しかないという仮定に矛盾する！

つまり、素数は無限個ある。 $\square$

補足：$p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_N + 1$ が素数となる N もある！

問： 素数を $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, ... のように、最小のものから大きくなるように順番に並べたとき、$p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_N + 1$ が素数にならない最小の $N \in \mathbb{N}$ を求めよ。

素数の無限性—ほかの証明方法（フェルマー数）

整数 $k \geq 0$ に対して、フェルマー数

$$F_k = 2^{2^k} + 1 \tag{1}$$

を考えよ。例：$F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, \ldots$.

1. 整数 $n \geq 1$ に対して、フェルマー数の列 $(F_k)_{k=0}^{n}$ が漸化式

   $$F_0 \times F_1 \times F_2 \times F_3 \times \cdots \times F_{n-2} \times F_{n-1} = F_n - 2$$

   を満たす。
2. $0 \leq k < n$ に対して、整数 $d \geq 1$ が F_k と F_n を両方とも割り切ると、上記の漸化式により、d が 2 を割り切るので、$d = 1$ または $d = 2$ であるが、(1) により $d \neq 2$. 即ち、$d = 1$.
3. 任意の $k \geq 0$ と $n \geq 1$ に対して、$k \neq n$ であるとき、F_k と F_n の最大公約数は 1 である。

無限の濃度

$|\mathbb{N}|$: 自然数（正の整数全体）$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ の個数

$|\mathbb{P}|$: 素数全体 $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ の個数

に対して、

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{P}| = \infty$$

であり、同様に

$|\mathbb{O}|$: 奇数全体 $\mathbb{O} = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$ の個数

$|\mathbb{E}|$: 偶数全体 $\mathbb{E} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ の個数

$|2\mathbb{N}|$: 正の偶数全体 $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ の個数

$|\mathbb{N}^2|$: 正の平方数全体 $\mathbb{N}^2 = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ の個数

も

$$|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{E}| = |\mathbb{O}| = \infty$$

を満たす。

可算無限個

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \ldots\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4,\ \ 5,\ \ 6,\ \ \ 7,\ \ \ 8,\ \ \ 9,\ \ 10, 11, 12, 13, 14, 15, \ldots\}$$

$$2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, \ldots\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3,\ 4,\ \ 5,\ \ \ 6,\ \ \ 7,\ \ \ 8,\ \ \ 9,\ \ \ 10,\ \ \ \ 11,\ \ \ 12,\ \ \ 13, \ldots\}$$

$$\mathbb{N}^2 = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, \ldots\}$$

可算無限個：偶数全体、奇数全体

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{E} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

$$n \quad \mapsto \quad \begin{cases} 0, & n = 1, \\ 2m, & n = 2m,\ m \in \mathbb{N}, \\ -2m, & n = 2m+1,\ m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \longrightarrow \mathbb{O} = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$$

$$n \quad \mapsto \quad \begin{cases} 2m+1, & n = 2m+1,\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ -2m+1, & n = 2m,\ m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

可算無限個：素数全体の濃度

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,\ldots\} & \longrightarrow & \mathbb{P} = \{2,3,5,7,11,13,17,\ldots\} \\
1 & \mapsto & p_1 = 2 \\
2 & \mapsto & p_2 = 3 \\
3 & \mapsto & p_3 = 5 \\
4 & \mapsto & p_4 = 7 \\
 & \ldots & \\
12 & \mapsto & p_{12} = 37 \\
 & \ldots & \\
n & \mapsto & p_n \\
 & \ldots &
\end{array}
$$

素数の無限性のいろんな証明

先ほど：

1. （ユークリッドによる）最も古い証明
2. フェルマー数 $2^{2^n}+1$ $(n \in \mathbb{N})$ の互い素な性質

本日：ゼータと積分を使う方法

他に：

1. $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots$ の発散
2. メルセンヌ数とラグランジュの定理を使う方法（代数的証明）
3. 位相的な証明
4. など...

ゼータによる素数の無限性

Euler (1737 年): 収束な等比級数 ※1

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots, \qquad |x| < 1$$

と素因数分解の一意性 ※2 により、

$$\begin{aligned}
\prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \times \cdots \\
&\overset{※1}{=} \left(1 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}\right)\left(1 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^k}\right)\left(1 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{5^k}\right)\cdots \\
&\overset{※2}{=} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots
\end{aligned}$$

であるが、調和級数が発散するため、素数は無限個存在しなくてはいけない。

調和級数の発散

$$
\begin{aligned}
1 &+ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\
&+ \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \\
&+ \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lllllllll}
= & 1+\frac{1}{2} & + & \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) & + & \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) & + & \left(\frac{1}{9}\cdots\right. & \\
\geq & 1+\frac{1}{2} & + & 2\times\frac{1}{4} & + & 4\times\frac{1}{8} & + & 8\times\frac{1}{16} & + \cdots \\
= & 1+\frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & + \cdots \\
= & 1+1 & & & + & 1 & & & + \cdots \\
= & \infty & & & & & & &
\end{array}
$$

ゼータ関数

※ $\forall m \in \mathbb{N}$、$m < x < m+1$ に対して、右辺が下から $\log_e x$ に抑えられることを用いても証明可：

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{m} \geq \int_1^x \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \log_e x \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \quad \square$$

では、

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

において"冪を上げ"て、$\mathrm{Re(s)} > 1$ に対して、

$$\zeta(s) := \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

と定める。

調和級数 vs 素数の逆数の和

$\log x := \log_e x$ と書く、つまり、$\log e = 1$, $e^{\log x} = x$.

※ 物理学に出てくる $\ln x$ と同じ記号。

$$H_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{N} \sim \log N,$$

即ち、

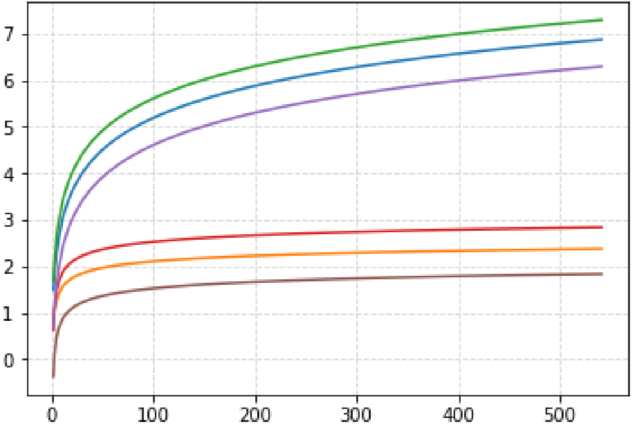
$$\lim_{N \to \infty} \frac{H_N}{\log N} = 1.$$

素数の逆数だけを渡る和を考えると、

$$\sum_{\substack{p \le x, \\ p \in \mathbb{P}}} \frac{1}{p} = \sum_{\substack{p \le x, \\ p\,:\,\text{素数}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{\wp_x} \sim \log\log x,$$

但し、$\wp_x$ は $p \le x$ を満たす最大の素数 p を表す。

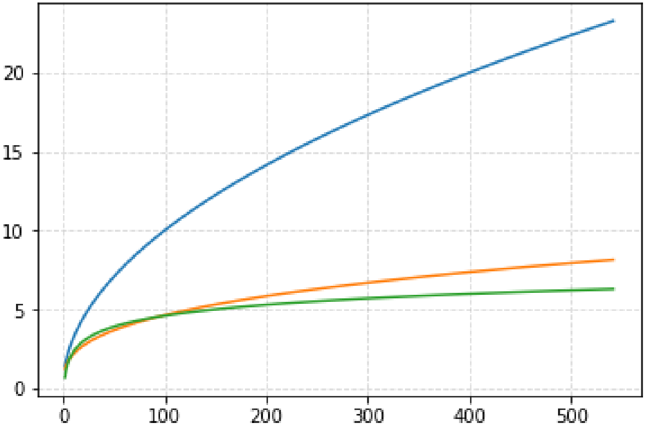
調和級数 vs 素数の逆数の和



緑：$1 + \log x$　青：$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$　紫：$\log x$

赤：$1 + \log \log x$　橙：$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$　茶：$\log \log x$

対数関数の発散速度



青：$\sqrt{x}$　橙：$\sqrt[3]{x}$　緑：$\log x$

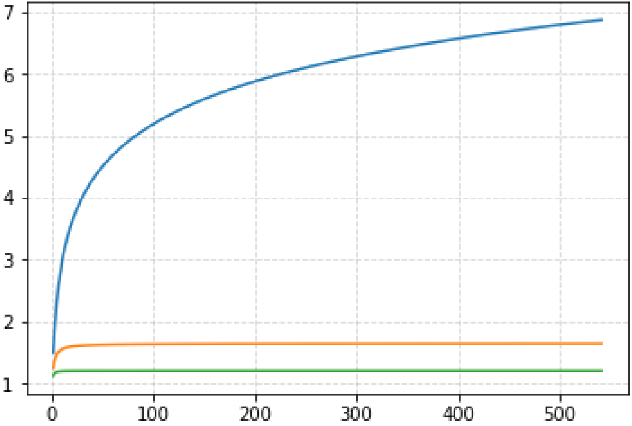
平方数の逆数の和

因みに、

$$\begin{aligned}\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \cdots \\ &= \frac{\pi^2}{6} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ **素数全体集合 $\mathbb{P}$ は正の平方数全体集合 $\mathbb{N}^2$ より稠密！**

調和級数 vs 平方数の逆数の和



青：$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$　橙：$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$　緑：$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^3}$

ゼータ関数で素数を数える、素数定理

$x \geq 2$ に対して、x 以下の素数の個数を素数を数える関数

$$\pi(x) := \sum_{\substack{2 \leq p \leq x \\ p \in \mathbb{P}}} 1$$

を用いて考える。

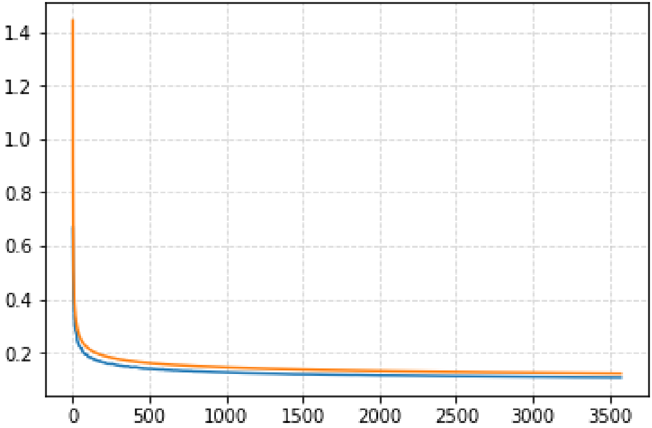
$\zeta(s)$ が $\mathrm{Re(s)} = 1$ において零点を持たないことは有名な素数定理:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

を意味する。即ち、

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1.$$

素数の "密度"



橙：$\frac{\pi(n)}{n}$　　青：$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\log n}$

素数は少ない？多い？

素数定理により、

$$\{1,2,\ldots,n\}\text{ の中にある素数の割合} = \frac{\pi(n)}{n} \sim \frac{1}{\log n}$$

となり、n が大きくなればなるほど、上記の比率がどんどん 0 に近づく。つまり、素数は自然数に比べれば非常に少ない！

しかし、任意の自然数 N に対して、

$$\pi(2N) - \pi(N) \geq 1$$

である。即ち、どんな N に対しても、N と $2N$ に間に必ず素数が存在する！

★ 素数は少ないが、自然数を全て表せるくらい十分に多く存在する！

等差数列の中の素数の個数 — mod 4 編

$x \geq 2$ に対して、

$$\pi(x;4,3) := \sum_{\substack{2\leq p\leq x \\ p\in\mathbb{P} \\ p\equiv 3 \pmod 4}} 1, \qquad \pi(x;4,1) := \sum_{\substack{2\leq p\leq x \\ p\in\mathbb{P} \\ p\equiv 1 \pmod 4}} 1.$$

$\zeta(s)$ の類似物 L 関数を考える。例えば、上記の数を調べるのに、

$$L(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} - \frac{1}{11^s} + \cdots, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

を用いる。$L(s)$ が $\mathrm{Re(s)} = 1$ において零点を持たないことにより

$$\pi(x;4,3) \ \sim\ \pi(x;4,1) \ \sim\ \frac{x}{2\log x}.$$

これは算術級数の素数定理の特殊な場合である。即ち、

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x;4,3)}{\pi(x;4,1)} = 1.$$

等差数列の中の素数の個数 — mod 3 編

同様に、$x \geq 2$ に対して、

$$\pi(x;3,2) := \sum_{\substack{2 \leq p \leq x \\ p \in \mathbb{P} \\ p \equiv 2 \pmod 3}} 1, \qquad \pi(x;3,1) := \sum_{\substack{2 \leq p \leq x \\ p \in \mathbb{P} \\ p \equiv 1 \pmod 3}} 1$$

とおくと、

$$\pi(x;3,2) \sim \pi(x;3,1) \sim \frac{x}{2\log x}$$

が成り立つ。これも算術級数の素数定理の特殊な場合である。
即ち、

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x;3,2)}{\pi(x;3,1)} = 1.$$

振り返って：チェビシェフの偏り

では、$\pi(x;4,3)-\pi(x;4,1)$ や $\pi(x;3,2)-\pi(x;3,1)$ をどうやって測るか？

実際、

$$\frac{\#\{x \le X \mid \pi(x;4,3)-\pi(x;4,1) > 0\}}{X} = \frac{1}{X} \sum_{\substack{x \le X \\ \pi(x;4,3)-\pi(x;4,1)>0}} 1$$

も

$$\frac{\#\{x \le X \mid \pi(x;3,2)-\pi(x;3,1) > 0\}}{X} = \frac{1}{X} \sum_{\substack{x \le X \\ \pi(x;3,2)-\pi(x;3,1)>0}} 1$$

も振動し、$X \to \infty$ のとき、極限が求まらない。

振り返って：チェビシェフの偏り — 解説編

測り方をうまく変えれば、チェビシェフの偏りが解説できる！

M. Rubinstein, P. Sarnak (1994 年):

$$\lim_{X\to\infty}\frac{1}{\log X}\sum_{\substack{x\le X\\ \pi(x;4,3)-\pi(x;4,1)>0}}\frac{1}{x}=0.9959\ldots,$$

$$\lim_{X\to\infty}\frac{1}{\log X}\sum_{\substack{x\le X\\ \pi(x;3,2)-\pi(x;3,1)>0}}\frac{1}{x}=0.9990\ldots.$$

振り返って：チェビシェフの偏り vs 素数定理

一方、“ほとんど”の場合において、

$$\pi(x;4,3) - \pi(x;4,1) > 0$$

でも、反対の場合も多く存在する！

J.E. Littlewood (1914 年):

$$\pi(x;4,1) - \pi(x;4,3) \geq \frac{\sqrt{x}\log\log\log x}{2\log x}$$

となる x が無限に存在する。

Tak 感謝

감사합니다 Dziękuję teşekkür ederim

cảm ơn bạn Баярлалаа

Vielen Dank

Labai ačiū Obrigado

Matur nuwun

Спасибо ขอบคุณค่ะ धन्यवाद् நன்றி Kiitos

谢谢 ধন্যবাদ Thank you Dankjewel شكرا

Gracias Ευχαριστώ Tack

Terima kasih

Хвала вам Merci بهت شکریه

Köszönöm

ありがとうございます

תודה Takk

多謝

Salamat po

Grazie

常に更新中 . . .