九州大学大学院数理学府
2025 年度修士課程入学試験
数学問題（ＭＭＡコース）

注意 • 問題 [1][2][3][4][5][6] の中から 3 題を選択して解答せよ.

• 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 3 題分提出すること.

• 以下，$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

[1]　2次実正方行列全体がなす $\mathbb{R}$ 上の線形空間を $\mathrm{M}(2,\mathbb{R})$ とする．$A \in \mathrm{M}(2,\mathbb{R})$ に対し，写像 $f_A\colon \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{M}(2,\mathbb{R})$ を $f_A(X) = AX + XA$ で定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) f_A が線形写像であることを示せ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，f_A の固有値をすべて求めよ．さらに f_A の各固有値に対応する固有空間を求めよ．

[2] 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

が収束するための $\alpha > 0$ に関する必要十分条件を求めよ.

[3]　実数値関数 $y = y(x)$ と $Q(x)$ に対し，以下の y に対する常微分方程式を考える．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = Q(x) \tag{$\star$}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1)　$Q(x)$ が恒等的に 0 のとき，$(\star)$ の一般解を求めよ．

(2)　$Q(x) = e^x$ のとき，$(\star)$ の一般解を求めよ．

(3)　$Q(x) = (2x^2 - 1)e^{-x^2+x}$ のとき，$(\star)$ の一般解を求めよ．

[4] $[0, \infty)$ 上の実数値関数 $f(t)$ に対し，ラプラス変換 $\mathcal{L}[f(t)](s)$ を以下で定める．

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{t \to +0} \frac{f(t)}{t}$ が存在すると仮定する．$F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ とおくとき，

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma$$

が成り立つことを示せ．

(2) a, b を正の定数とする．広義積分

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt$$

の値を求めよ．

[5] c を正の定数とする．2 次元確率変数 (X, Y) は同時確率密度関数

$$f(x,y) = \begin{cases} c(8xy - 2x - 4y + 3) & (0 \leq x \leq 1 \text{ かつ } 0 \leq y \leq 1) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

をもつとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) c の値を求めよ．

(2) X の期待値および分散を求めよ．

(3) $a, b \in \mathbb{R}$ に対して確率変数 $\hat{Y}$ を $\hat{Y} = aX + b$ と定める．このとき，期待値 $\mathbf{E}[(\hat{Y} - Y)^2]$ を最小にする a, b の値を求めよ．

[6] a を正の定数とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 複素関数

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^3}$$

の極と，その極に対応する留数を求めよ．

(2) 広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}$$

の値を求めよ．