九州大学大学院数理学府
2025年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意

- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10][11] の中から2題を選択して解答せよ．
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず2題分提出すること．
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ に対し，以下の問に答えよ．

(1) G は行列の積に関して群をなすことを示せ．また可換でないことを示せ．

(2) 群 G の中心は

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\}$$

と一致することを示せ．

(3) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を加法群 $\mathbb{R}$ の直積とする．剰余類群 G/Z は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と同型であることを示せ．

[2] I を多項式環 $\mathbb{R}[X]$ において X^2+1 が生成するイデアルとし，J を多項式環 $\mathbb{R}[X,Y]$ において X^2+1 が生成するイデアルとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) I は $\mathbb{R}[X]$ の極大イデアルであり，商環 $\mathbb{R}[X]/I$ は複素数体 $\mathbb{C}$ と同型であることを示せ．

(2) J は $\mathbb{R}[X,Y]$ の素イデアルであることを示せ．

(3) J を含む $\mathbb{R}[X,Y]$ の極大イデアルをすべて求めよ．

[3] 条件 $\zeta^7 = 1$ を満たす実数ではない複素数 ζ に対し，以下の問に答えよ.

(1) $\zeta^6 + \zeta^5 + \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) $\alpha = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$, $\beta = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$ とするとき，$(\alpha - \beta)^2$ は実数であることを示せ.

(3) 体 $\mathbb{Q}(\zeta)$ の部分体 K で，$[K : \mathbb{Q}] = 2$ を満たすものが存在するかどうか，理由とともに答えよ.

[4] $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級関数 $z = f(x, y)$ が定める曲面 S を考える．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 曲面 S の第 1 基本形式を求めよ．

(2) 曲面 S の第 2 基本形式とガウス曲率を求めよ．

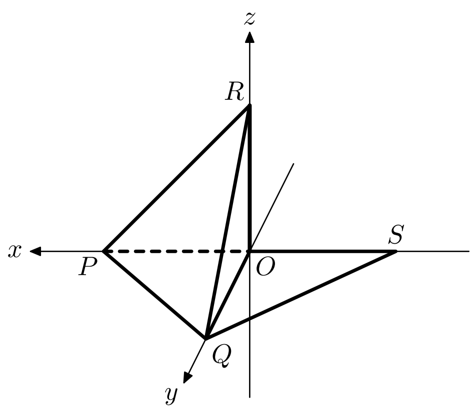
(3) $f(x, y) = xy$ の場合を考える．点 $(a, b, f(a, b))$ における曲面 S の単位法ベクトルを $\mathbf{n}(a, b) \in \mathbb{R}^3$ とする．以下の条件を満たす $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ が存在するかどうか，理由とともに答えよ．

(条件) $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$g(x, y) = \mathbf{n}(a, b) \cdot (x, y, f(x, y))$$

は点 (a, b) において極値をとる．ただし上式右辺の $\cdot$ は $\mathbb{R}^3$ における内積とする．

[5] 下図のように $\mathbb{R}^3$ 内の点 O, P, Q, R, S を



$$O = (0,0,0), \quad P = (1,0,0), \quad Q = (0,1,0), \quad R = (0,0,1), \quad S = (-1,0,0)$$

で定める．3角形 OQS の周として与えられる1次元単体複体を K_1，4面体 $OPQR$ の境界として与えられる2次元単体複体を K_2 とし，$K = K_1 \cup K_2$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 各 $i = 0, 1, 2, \ldots$ に対し，K_1 のホモロジー群 $H_i(K_1)$ を求めよ．なおこの問および以下の問では,「X のホモロジー群」とは X の整係数ホモロジー群 $H_i(X) = H_i(X; \mathbb{Z})$ を指す．

(2) 各 $i = 0, 1, 2, \ldots$ に対し，K_2 のホモロジー群 $H_i(K_2)$ を求めよ．

(3) 各 $i = 0, 1, 2, \ldots$ に対し，K のホモロジー群 $H_i(K)$ を求めよ．

(4) 連続写像 $f\colon K \to K$ の像が K_2 に含まれるとき，1次ホモロジー群への誘導準同型 $f_*\colon H_1(K) \to H_1(K)$ は零写像（すべての元を0にうつす写像）となることを示せ．

[6]　円周

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

について，以下の問に答えよ．

(1) S^1 はコンパクトなハウスドルフ空間であることを示せ．

(2) S^1 は 1 次元 C^∞ 級多様体となることを示せ．

(3) $f(x, y) = x + y$ で定まる関数 $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ に対し，点 $p \in S^1$ での微分

$$(df)_p\colon T_pS^1 \to T_{f(p)}\mathbb{R}$$

が零写像（すべての元を 0 にうつす写像）となる点 p をすべて求めよ．

[7] $t > 0$ に対して連続関数 $P_t \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$P_t(x) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{x^2 + t^2}$$

で定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} P_t(x)\,dx$ の値を求めよ．

(2) $t \to 0$ のとき，P_t が $\mathbb{R}$ 上 0 に概収束することを示せ．

(3) すべての $\delta > 0$ に対して

$$\lim_{t \to 0} \int_{\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \delta\}} P_t(x)\,dx = 0$$

が成り立つことを示せ．

(4) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を有界な連続関数とする．このとき，各 $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}} P_t(x - y) f(y)\,dy = f(x)$$

が成り立つことを示せ．

[8] 以下の問に答えよ．

(1) $z \in \mathbb{C}$ の関数 $\cosh z = \dfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ の零点をすべて求めよ．

(2) $x \in \mathbb{R}$ のとき，$\cos(x + \pi i)$ の実部と虚部をそれぞれ $\cos x$ と $\sin x$ を用いて表せ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{\cosh x}\, dx$ の値を求めよ．

[9]　$n \in \mathbb{N}$，$\lambda \in \mathbb{R}$ とする．$r > 0$ における C^2 級実数値関数 $f(r)$ は

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\bigl(f(|x|)\bigr) = \bigl(|x|^2 - \lambda\bigr) f(|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{$*$}$$

を満たすとする．ただし，$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ である．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f(r)$ が満たす非自明な 2 階常微分方程式を求めよ．

(2) $\lambda = n$ とする．$g(r) = f(r)e^{r^2/2}$ が満たす常微分方程式を用いて，$(*)$ の解 $f(r)$ で $\displaystyle\lim_{r\to\infty} f(r) < \infty$ となるものをすべて求めよ．

(3) $\lambda = n + 4$ とする．$g(r) = f(r)e^{r^2/2}$ が r に関する零でない多項式となるような $(*)$ の解 $f(r)$ をひとつ求めよ．

[10]　α を正の実数とする．独立な n 個の実数値確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ はいずれも以下の確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\alpha^2} \exp\left(-\dfrac{x}{\alpha}\right) & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

をもつとする．正の実数 c_n に対して，確率変数

$$\widehat{\alpha}_n = c_n \sum_{i=1}^{n} X_i$$

を考える．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　$\widehat{\alpha}_n$ が α の不偏推定量となるような c_n を求めよ．

(2)　(1) で求めた c_n に対し，$\widehat{\alpha}_n$ は一致推定量であることを示せ．

(3)　(1) で求めた c_n に対し，$\widehat{\alpha}_n$ は有効推定量であることを示せ．すなわち，$\widehat{\alpha}_n$ の分散がクラメール・ラオの下限に一致することを示せ．

[11] $n \in \mathbb{N}$ とする．$f(x)$ を区間 $[-1,1]$ 上の C^{n+1} 級実数値関数とする．また $i = 0, 1, \ldots, n$ に対して $x_i = \cos\dfrac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}$ とおき，n 次多項式 $p_n(x)$ を

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x_i) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)$$

と定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 区間 $[-1,1]$ 上の関数 $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ を考える．$T_n(x)$ は漸化式

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

を満たすことを示せ．さらに $T_n(x)$ は最高次の係数が 2^{n-1} の n 次多項式であることを示せ．

(2) $a \in [-1,1] \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$ を固定し，区間 $[-1,1]$ 上の関数 $g(s)$ を

$$g(s) = f(s) - p_n(s) - \bigl(f(a) - p_n(a)\bigr) \prod_{k=0}^{n} \frac{s - x_k}{a - x_k}$$

と定める．このとき，$g'\bigl(\xi_i\bigr) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ を満たす $n+1$ 個の実数 $-1 < \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n < 1$ が存在することを示せ．

(3) 不等式

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n (n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\|u\|_\infty = \max\bigl\{ |u(x)| \bigm| -1 \leq x \leq 1 \bigr\}$ とする．