九州大学大学院数理学府

2025 年度修士課程入学試験
基礎科目問題

注意
- 問題 [1][2][3][4] のすべてに解答せよ．
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1]　2次実正方行列全体がなす $\mathbb{R}$ 上の線形空間を $\mathrm{M}(2,\mathbb{R})$ とする．$A \in \mathrm{M}(2,\mathbb{R})$ に対し，写像 $f_A\colon \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{M}(2,\mathbb{R})$ を $f_A(X) = AX + XA$ で定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) f_A が線形写像であることを示せ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，f_A の固有値をすべて求めよ．さらに f_A の各固有値に対応する固有空間を求めよ．

[2] 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

が収束するための $\alpha > 0$ に関する必要十分条件を求めよ.

[3] $n \in \mathbb{N}$ とし，n 次複素正方行列全体がなす集合を $\mathrm{M}(n, \mathbb{C})$ とする．写像 $r\colon \mathrm{M}(n, \mathbb{C}) \to [0, \infty)$ を

$$r(X) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ は } X \text{ の固有値}\}$$

で定義する．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $r(X) = 0$ かつ $r(X^*X) > 0$ となる $X \in \mathrm{M}(2, \mathbb{C})$ が存在するかどうか，理由とともに答えよ．ただし，X^* は X の随伴行列（転置共役行列）とする．

(2) 任意の $X \in \mathrm{M}(n, \mathbb{C})$ に対して $r(X)^2 \leq r(X^*X)$ となることを示せ．

[4] 関数 $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{t^5+1}}\,dt$$

で定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 各 $x \geq 1$ に対して，$f(x) \leq 2$ となることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．