2024年度

九州大学理学部数学科第３年次編入学
試験問題

注意事項

(1)　試験開始の合図があるまで, 問題冊子の中を見てはいけません.

(2)　問題は4問あります.

(3)　「解答はじめ」の合図があったら問題冊子を開き，不足等に気づいた場合は手をあげて監督者に知らせてください.

(4)　試験開始後，各解答用紙に，受験番号，氏名を記入してください.

(5)　解答用紙の表に書ききれない場合は，裏に続けて書いてください．それでも不足するときは，手をあげて監督者に申し出て追加の解答用紙を受取り，問題番号，受験番号，氏名を記入してください.

(6)　試験終了後，解答用紙は，解答の記入のあるなしにかかわらず，すべて提出してください．問題冊子は持ち帰ってください.

九州大学理学部数学科

(１枚白紙：計算用紙として利用できます)

以下の問いでは，$\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする．

[1] $f(x,y) = (x+y)\, e^{-(x^2+y^2)}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ の極値を全て求めよ．また極値を与える点も求めよ．

(2) 閉領域 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上の関数 $f(x,y)$ の最大値，最小値を求めよ．また最大値，最小値を与える点も求めよ．

[2] 以下の問いに答えよ．

(1) a を正の定数とし，A を 3 直線 $x=0,\ y=0,\ x+y=a$ で囲まれた xy 平面内の領域とする．2 重積分

$$\iint_A |x-y|\, e^{x+y}\, dxdy$$

を求めよ．

(2) α を正の実数とする．広義積分

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x-\sin x)^{\alpha}}\, dx$$

が収束するような α の範囲を求めよ．

[3] 実数を成分にもつ 2×2 行列の全体を $M_2(\mathbb{R})$ と書く．$M_2(\mathbb{R})$ は，通常の行列の和と実数によるスカラー倍によって，$\mathbb{R}$ 上の線形空間となる．また，$M_2(\mathbb{R})$ の部分空間 $V=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \middle| x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$ を定義する．

2×2 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ に対して，$\tilde{A}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とおき，写像 $f_A\colon V\to M_2(\mathbb{R})$ を，

$$f_A(X)=AX\tilde{A} \qquad (X\in V)$$

で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) 任意の $X\in V$ に対して $f_A(X)\in V$ であることを示せ．また，f_A は V の線形変換となることを示せ．

(2) V の基底 $E=\left\langle\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\rangle$ に関する f_A の表現行列 B を求めよ．

(3) B の行列式を，A の行列式を用いて表せ．

（注）f を線形空間 V から V への線形変換，$E=\langle \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n\rangle$ を V の基底とする．

$$f(\boldsymbol{e}_j)=\sum_{i=1}^{n} r_{ij}\boldsymbol{e}_i \qquad (1\leq j\leq n)$$

で定まる r_{ij} を ij 成分とする行列 R を，基底 E に関する f の表現行列という．

[4] $\mathbb{R}^2$ の原点を通らず，かつ互いに平行でない 2 直線 ℓ, m がある．
また，$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を線形変換とし，$T(\ell) = \{T(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \ell\}$ と書く．以下の問いに答えよ．

(1) $T(\ell) \subset \ell$ であるとき，T は 1 を固有値にもつことを示せ．

(2) $T(\ell) \subset \ell$ かつ $T(m) \subset m$ であるとき，T は恒等変換であることを示せ．

(1 枚白紙：計算用紙として利用できます)