2025年度

九州大学理学部数学科第３年次編入学
試験問題

注意事項

(1)　試験開始の合図があるまで, 問題冊子の中を見てはいけません.

(2)　問題は４問あります.

(3)　「解答はじめ」の合図があったら問題冊子を開き，不足等に気づいた場合は手をあげて監督者に知らせてください.

(4)　試験開始後，各解答用紙に，受験番号，氏名を記入してください.

(5)　解答用紙の表に書ききれない場合は，裏に続けて書いてください．それでも不足するときは，手をあげて監督者に申し出て追加の解答用紙を受取り，問題番号，受験番号，氏名を記入してください.

(6)　試験終了後，解答用紙は，解答の記入のあるなしにかかわらず，すべて提出してください．問題冊子は持ち帰ってください.

九州大学理学部数学科

(１枚白紙：計算用紙として利用できます)

[1]　通常の和と定数倍に関して高々 3 次の実係数多項式全体がなす実ベクトル空間を $\mathbb{R}[x]_3$ と書く．$\mathbb{R}[x]_3$ の二つの多項式 $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ と $g(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ に対して，その内積を $(f, g) = a_3b_3 + a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$ で定める．また，

$$W = \left\{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \,\middle|\, f(1) = 0,\ f''(-1) = 0 \right\}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) W が $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間であることを示せ．

(2) W の次元と 1 組の基を求めよ．

(3) $\mathbb{R}[x]_3$ の元 $h(x) = -2x^2 + 6$ を W に直交射影して得られる多項式を求めよ．

[2] 1回偏微分可能な関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $u=xy$，$v=y$ と変数変換して $h(u,v)=f(x,y)$ とおいたとき，$\dfrac{\partial h}{\partial u}$，$\dfrac{\partial h}{\partial v}$，$x$，$y$ を用いて，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ表せ．

(2) $f(x,y)$ が関係式

$$x\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial y}$$

を満たすならば，$f(x,y)$ は xy のみの関数であることを示せ．

[3] A を実 n 次正方行列, $\mathbf{b}$ を実 n 次元数ベクトルとし，$\mathbb{R}^n$ のアフィン変換 f を $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}+\mathbf{b}$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$ で定める．整数 $k \geq 1$ に対し，f^k で f の k 回合成を表す．$f^k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ を満たす点 $\mathbf{x}$ を f の k-周期点といい，特に 1-周期点を固定点と呼ぶ．

いま，行列 A がいかなる 1 のベキ根もその固有値に持たないと仮定する．

(1) f の固定点が唯一つ存在することを示せ．

(2) 任意の $k \geq 2$ に対して，f の k-周期点は (1) で求めた固定点に限ることを示せ．

[4] 平面内の集合を $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1\}$ と定める．このとき，広義積分 $I = \iint_D \frac{1}{1-x^2y^2}dxdy$ を用いて，無限和 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ を求めたい．

(1) $(x,y) \in D$ に対して

$$\cos u = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}} \quad (0 \leq u < \frac{\pi}{2}), \quad \cos v = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}} \quad (0 \leq v < \frac{\pi}{2})$$

とおいたとき，x と y を用いて $\sin^2 u$ を表し，さらに u と v を用いて x と y をそれぞれ表せ．

(2) I の積分範囲 D に対応する (u,v) の範囲を求めよ．

(3) 広義積分 I を求めよ．

(4) 無限和 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ を求めよ．

(１枚白紙：計算用紙として利用できます)