

$$\sin(\theta) + \sin(2\theta) + \sin(3\theta) + \cdots + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(3\theta) + \cdots$$

からわかること ($\rightarrow \infty$)

九州大学大学院数理学研究院 / マス・フォア・インダストリ研究所 公開講座 講義録

2025/08/08 担当 坂本 祥太 sakamoto.shota.588@m.kyushu-u.ac.jp

目次

1	高校数学からの準備	3
1.1	三角関数	3
1.2	微分と積分	7
2	Fourier 級数	13
2.1	Fourier の予想と偏微分方程式	13
2.2	Fourier 級数で遊ぶ	18
2.3	Fourier 級数の収束に関する条件	20
3	Fourier 変換	23
3.1	Fourier 変換と急減少関数	23
3.2	Fourier 変換の偏微分方程式への応用	26
4	Schwartz 超関数	33
4.1	Schwartz 超関数とその微分	33
4.2	緩増加超関数とその Fourier 変換	37
4.3	基本解	38
5	結句 (現代的理論への案内)	41

前書き

本講義録は 2025 年度に九州大学大学院数理学研究院及びマス・フォア・インダストリ研究所が主催して開催する公開講座「現代数学入門」の筆者担当分に関連する内容をまとめたものです。概ね話の順番通りに講義録を作っていますが、一部当日時間の都合上話せないと思われることを少々詳しく書いています (特に後ろのほうはそうです)。

タイトルの数式は Fourier 級数と呼ばれるもので、講義の前半はこれを中心に扱い後半はそこからの発展的内容を扱います。いくらか高校数学で習うことを前提知識として用いるので、高校生の方は 1 章を見てみて授業で習ったが忘れたことがあれば確認しておくといいたと思います。

後半は特に偏微分方程式への応用について触れます。内容としては学部 4 年から修士課程程度の内容ですが、一番最後のほうはかなり専門的な内容を含んでいるので、全然わからなくても「志望すればいつかこういうことを学べるかも」ぐらいの気分で聞いて下さればよいと思います。それ自身の勉強を志すにせよ、他分野への応用を志向するにせよ、将来皆さんが解析学を学習する動機の一つとなれば幸いです。

講義中よく使う記号: 講義録では日本語で書いていますが、時間の短縮のため以下の記号を使います。

- $\mathbb{N}$: 自然数全体 $\{1, 2, 3, \dots\}$ を表す。英語の Natural number.
- $\mathbb{Z}$: 整数全体を表す。ドイツ語の Zahl(数) より
- $\mathbb{Q}$: 有理数全体を表す。英語の Quotient(商) より
- $\mathbb{R}$: 実数全体を表す。英語の Real number より
- $\mathbb{C}$: 複素数全体 英語の Complex number より
- $\forall$: 「すべての」「任意の」という意味の記号、例えば「 $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ 」は「全ての実数 x に対して $x^2 \geq 0$ が成立する」という意味
- $\exists$: 「ある」という意味の記号「 $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 0$ 」とは「ある実数 x が存在して $x^2 = 0$ が成立する」という意味 (もちろん $x = 0$)

1 高校数学からの準備

この章では Fourier 解析の話をするための準備となる定義や性質について述べます。

1.1 三角関数

定義 1.1 (三角比). 図のように $C = 90^\circ$ の直角三角形 ABC が与えられているとき、角度 $0^\circ < \angle A < 90^\circ$ に対して次のように辺の比を対応させた

$$\sin \angle A = \frac{BC}{AB}, \quad \cos \angle A = \frac{AC}{AB}, \quad \tan \angle A = \frac{BC}{AC}$$

を順に $\angle A$ のサイン (正弦)・コサイン (余弦)・タンジェント (正接) という。これらをまとめて三角比という。^{*1}

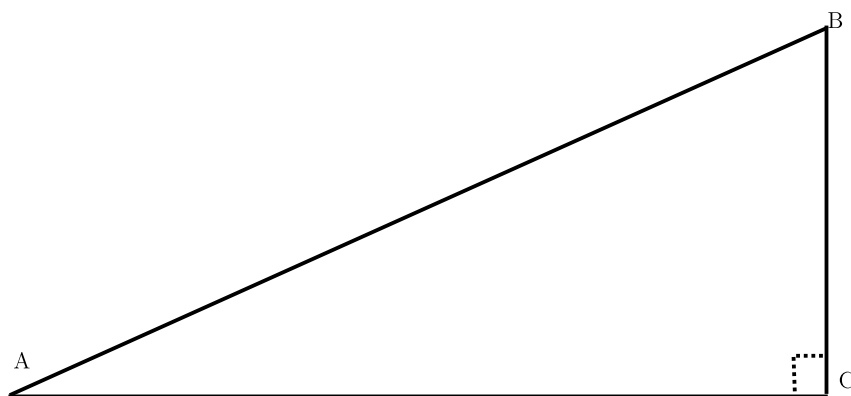


図 1 直角三角形 ABC , $C = 90^\circ$

三角比の始まりは古代における距離や土地の測量・天文学と言われています。このことはエジプトのパピルスやメソポタミアの粘土板に記されており、例えばピラミッドの建造において底面を正方形とするときその一片の長さとピラミッドの高さを決めて斜面を何度にして作ればよいかということに三角比が必要です。また古代文明では暦や季節の計算は夜間に天体がどこにあるかを計測して行いましたが、天体が仮想的な球面 (天球) 上を動いているとして各日ごとに位置を測定するとき、単に記録するだけでなく角度差を考える

^{*1} これらの逆数 $\csc$ (コセカント), $\sec$ (セカント), $\cot$ (コタンジェント) も込めた 6 つの比も三角比といいます。

ことによって移動距離を測ろうとすると自然と三角比の概念に行き着きます。^{*2}この概念は古代エジプト・メソポタミアからギリシャ、インド、イスラム世界へと受け継がれ多大な研究がなされました。

次の定義のため、半径 $r > 0$ の円の中心角 $0^\circ \leq \theta^\circ \leq 360^\circ$ の扇形の弧の長さは

$$2\pi r \cdot \frac{\theta}{360}$$

であること、特に $r = 1$ のとき角度 θ° と弧の長さ $\frac{\pi}{180}\theta$ は一対一に対応していることに注意します。この一対一対応により、円弧の長さによって角度を対応付ける方法を弧度法といい、その単位を rad(ラジアン) で表します。度数法の一週 360° が弧度法の 2π に対応するため、

$$180^\circ = \pi(\text{rad})$$

という変換式が成り立ちます。以下慣習に従い、rad を省略して書きます。

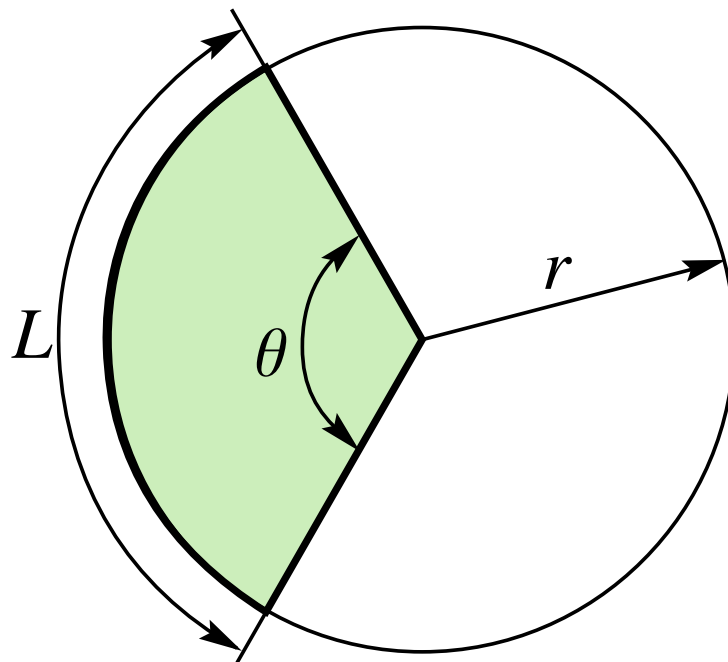


図 2 中心角 θ の扇形 この場合 $L = r\theta$, L が 0 から $2\pi r$ (円周) に変わるのに対応して中心角が 0 から 2π に変化する https://en.wikipedia.org/wiki/Circular_sector より引用

^{*2} 厳密にはこれは球面上の三角比を必要とします

定義 1.2 (三角関数). 実数 (以下 $\mathbb{R}$ とかく) から実数への関数

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

を、与えられた角度 $\theta \in \mathbb{R}$ に対し図のように半径 1, 原点中心の円上の点で $(1, 0)$ から反時計回りに角度 θ に対応する点の、それぞれ y 座標、 x 座標として定める。また

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

を $\sin$ と $\cos$ の比として $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ として定める。ここで集合差 $A \setminus B$ とは $x \in A$ かつ $x \notin B$ なる元の全体を表す (つまり $\tan$ の定義域は $\cos$ が 0 になる $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ を除いた全体で定義される)。

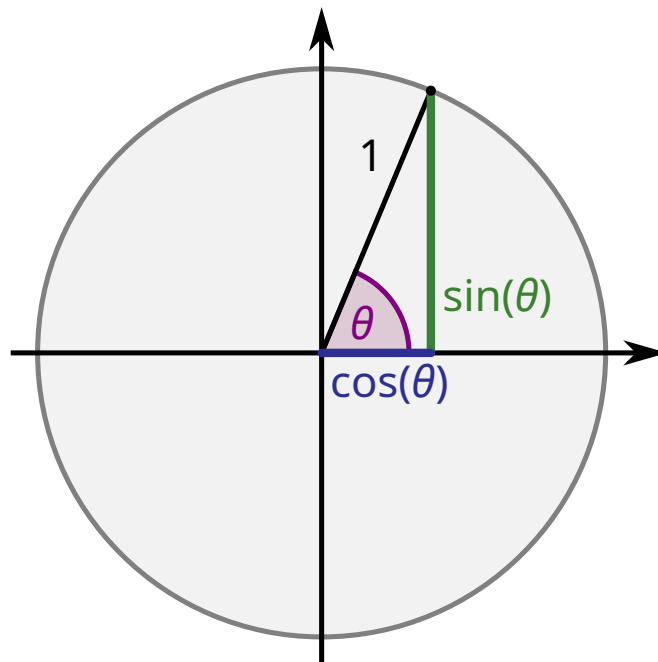


図 3 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の図 <https://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometry> より引用

図 3 のように、原点と $(1, 0)$ を結ぶ線分を半径として、これを反時計回りに θ だけ回したとき $(1, 0)$ は円周上のある点に移動しますが、移動先の点の x 座標が $\cos \theta$, y 座標が $\sin \theta$ です。このように定義することの利点は、 θ が 0 から $\frac{\pi}{2} (= 90^\circ)$ までに限る必要がなくなること、また三角関数が周期 2π をもつ周期関数であること、すなわち

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta, \quad \tan(\theta + 2\pi) = \tan \theta$$

が全ての実数 θ ($\tan$ の場合は定義できない点を除いて全て) について成立することがわかります。また $\sin$ と $\cos$ はそれぞれ奇関数と偶関数、つまり

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

となることを注意しておきます。特に $\sin(n\pi) = 0$, $\cos(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 0$ が全ての $n \in \mathbb{Z}$ に対し成立します。これに関しては図 4 もご覧ください。

それから後で使うので三平方の定理

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

加法定理

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

も述べておきます。

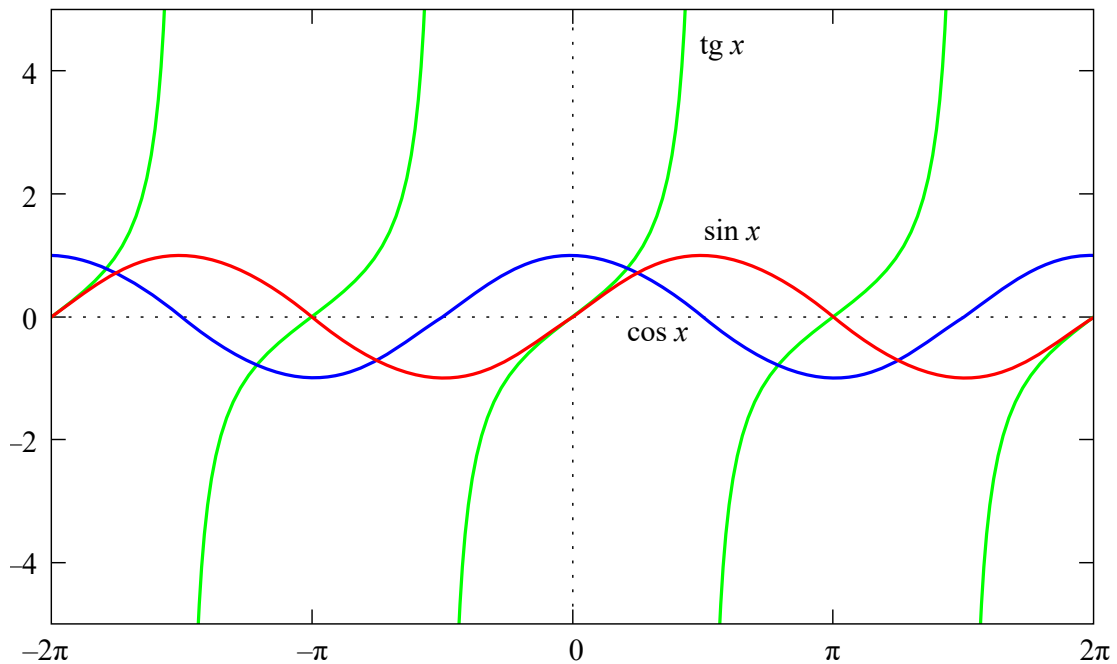


図 4 三角関数のグラフ https://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometric_functions より引用

1.2 微分と積分

定義 1.3 (極限と連続性). $x \rightarrow a$ は x を a と異なる値としながらいくらでも x を a に近づけることを表す。例えば $x = a + \frac{1}{n}$ とし $n = 1, 2, \dots$ といくらでも大きくすると x は a にいくらでも近づくが、これはあくまでも一つの特異な近づき方である。これ以外にも可能な近づき方をすべてまとめたものを $x \rightarrow a$ と表す。

関数 f の $x \rightarrow a$ における極限を、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

で表す。この値が存在するとき、 f の $x \rightarrow a$ における極限值という。

関数 f が $x = a$ で連続ということを、

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

が成立することとして定める。 f が閉集合 $[a, b]$ (一般に集合 A) で連続であるとは、 $x \in [a, b]$ ($x \in A$) なる全ての x で f が連続であることをいう。

後で使うので、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

に注意しておきます。これは図 1 で θ が十分 0 に近いとき、 θ に対応する扇形の弧の長さと $\sin \theta$ に対応する三角形の高さが「ほとんど同じ」ことから来ています。^{*3}

定義 1.4 (微分). $\mathbb{R}$ の开区間 (a, b) で定義された関数 f に対し、点 $x \in (a, b)$ における f の微分係数 $f'(x)$ を

$$\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で定義する。ここで右辺は h を $\neq 0$ として 0 に限りなく近づけたときの $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ の極限。この極限が定義できないときは $f'(x)$ は定義しない。

全ての $x \in (a, b)$ に対して $f'(x)$ が定義されるとき、 x に対して $f'(x)$ を対応させる新たな関数 $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ が定義できる。この関数のことを f の導関数という。

^{*3} このことの厳密な証明は結構大変です

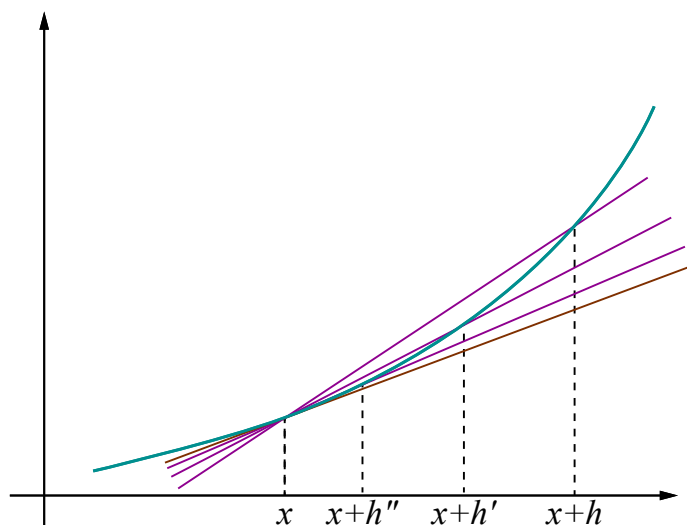


図5 微分の概念図 $h \rightarrow h' \rightarrow h''$ と誤差を小さくしていくと、2点を結ぶ線が接線を近似する <https://ja.wikipedia.org/wiki/微分> より引用

図5は微分が関数の接線の傾きに対応するというものの概念図です。点 x と、3点 $x+h$, $x+h'$, $x+h''$ をそれぞれ結んで直線を作り、その幅を小さく ($h \rightarrow h' \rightarrow h''$) していくとだんだん直線の傾きが点 x における関数の接線の傾きに近づいていくことが見て取れます。

例1: $f(x) = x^n$, n 自然数 ($n \in \mathbb{N}$ と書く) のとき二項定理^{*4}を用いて

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} \right] = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

ここで3つめの等式に移るとき、 x^n は差し引きで消え $h \neq 0$ なので割り算ができ、最後に $h \rightarrow 0$ なので h が掛かる第二項以降は全て0に収束することを用いました。このように、 h は0でないとして最初に割り算して後で0に近づける、という操作は微分で頻出です。

^{*4} $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k a^k b^{n-k} = {}_nC_0 b^n + {}_nC_{n-1} a^1 b^{n-1} + \cdots + {}_nC_n a^n$. ${}_nC_k$ とは n 個の集まりから k 個を取り出す方法の個数で、特に ${}_nC_n = {}_nC_0 = 1$, ${}_nC_1 = n$.

例 2: $f(x) = \sin x$ のとき、加法定理を用いて

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right], \end{aligned}$$

ここで加法定理と三平方の定理、 $\sin h/h \rightarrow 1$ ($h \rightarrow 0$) を用いて

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{2} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

なので、上の計算に代入し

$$f'(x) = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

つまり $(\sin x)' = \cos x$ です。同様の計算で $(\cos x)' = -\sin x$ (符号に注意) も示せますが、これは練習問題とします。

定義 1.5 ((Riemann) 積分^{*5}). $[a, b]$ 上の関数 f に対し、「 f のグラフが x 軸と囲む面積」を f の定積分と言い、

$$\int_a^b f(x) dx$$

とかく ($\int$ はインテグラルと読む)。このとき片方の端点 a を止め、もう片方の端点 b のかわりに $x \in (a, b)$ を動かすと関数 $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ が定義できる。これに関して微分積分学の基本定理が成り立つ: f が連続関数ならば

$$\frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(x) dx = f(x), \quad F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

微分すると f になる関数を f の原始関数といい、これを求める操作を不定積分という。^{*6}これを記号で

$$\int f(x) dx$$

とかく。

^{*5} 高校や大学 1-2 年で扱う積分は全てこの Riemann 積分です あとでこれと異なる積分が出てくるので名前を付けています

^{*6} ここでは日本語的に両者を区別していますが、しないことも多々あります

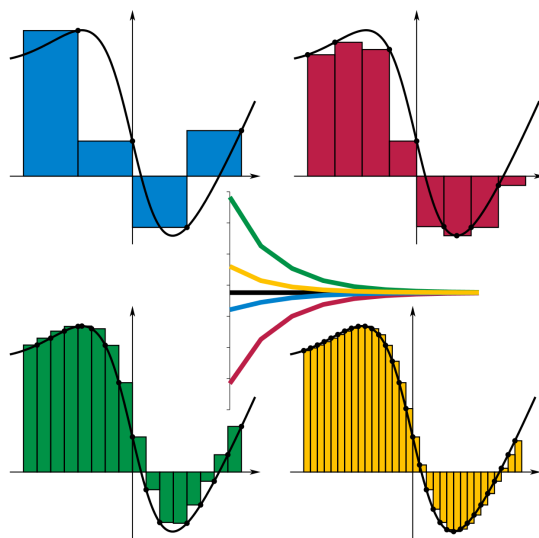


図 6 積分の概念図 グラフと x 軸の間に沢山の長方形を描き込むと、それら長方形の面積の総和はグラフと x 軸が囲む面積に近づいてゆく <https://en.wikipedia.org/wiki/Integral> より引用

例:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

ここで C は積分定数と呼ばれる定数。微分すると定数は 0 になるので、不定積分では定数分の不定性がある。

頻繁に使う微積分の公式として合成関数の微積分と部分積分の式を書いておきます:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(ax)) &= af'(ax), \\ F'(x) = f(x) &\Rightarrow \int_a^b f(cx)dx = \frac{1}{c}(F(cb) - F(ca)), \\ \int_a^b f(x)g'(x)dx &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

1 つめは左辺をそのまま計算、2 つめは $cx = y$ とすると $[a, b]$ は $[ca, cb]$ に移り、 $cdx = dy$ となることを用い、3 つめは $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ に注意すると出ます。

以下の 2 つは高校数学では習いませんが、後々必要になるので定義しておきます:

定義 1.6 (偏微分). 2 つ (以上) の変数 (x, y) に依存して決まる関数 $f(x, y)$ があるとす

る。このとき一方の変数を止めてもう一方の変数で微分することを偏微分という。

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \quad f_y(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

をそれぞれ f の x 偏導関数、 f の y 偏導関数という。同様に $(f_x)_x = f_{xx}$ を f の xx 偏導関数、 $(f_x)_y = f_{xy}$ を f の xy 偏導関数などという。

例: $f(x, y) = x + y^2$ なら $f_x = 1, f_y = 2y$.

$f(x, y) = \sin mx \cos ny$ なら

$$f_x = m \cos mx \cos ny, \quad f_y = -n \sin mx \sin ny,$$

$$f_{xx} = (f_x)_x = -m^2 \sin mx \cos ny, \quad f_{xy} = (f_x)_y = -mn \cos mx \sin ny.$$

定義 1.7 (指数関数). 複素数 z ($z \in \mathbb{C}$ と書く) に対し指数関数 e^z を

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

で定める。この無限和 (級数という) は全ての $z \in \mathbb{C}$ に対して定義可能である。ただし $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ で、 $0! = 1$ とする。

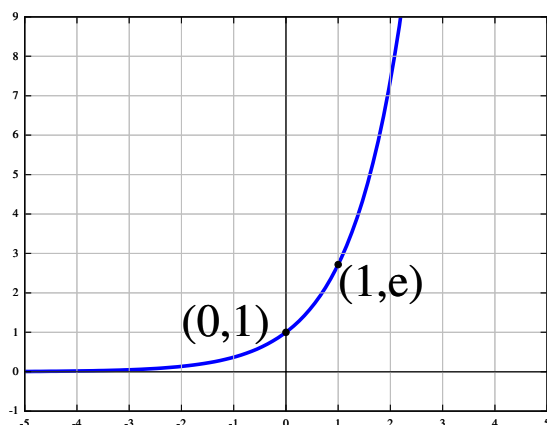


図7 $f(x) = e^x$ の図 x が大きくなるにつれて急激に増大し、 $x \rightarrow -\infty$ のとき 0 に近づく https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_function より引用

指数関数自体は数 III で習うと思いますが、勿論このような定義ではないと思います。しかしこの定義は数 III で定義された指数関数と同じものを与えることが知られています。この関数を定める特徴は

$$(e^x)' = e^x, \quad e^0 = 1$$

です。このことを用いると指数法則

$$e^{x+y} = e^x e^y = e^y e^x$$

が示せます。また i を虚数単位 ($i^2 = -1$ なる複素数) とすると Euler の公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が成立します。^{*7}証明は

$$f(x) = e^{-ix}(\cos x + i \sin x)$$

とおくと $f'(x) = 0$ かつ $f(0) = 1$ が成り立つことによります。

最後に用語を 1 つ定義しておきます:

定義 1.8 (微分方程式). ある未知関数に関する方程式で、その関数の微分が入っているものを微分方程式という。未知関数が 1 つの変数にのみ依存する場合常微分方程式、2 つ以上の変数に依存するとき偏微分方程式という。

例: $x = x(t)$ に対する $m \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = F(t)$ (m は質量、 F は力 Newton の運動方程式)

$u = u(t, x)$ に対する $u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0$ (波動方程式)

^{*7} 以下ではこの公式は $x \in \mathbb{R}$ のときに成り立つことを知っていれば十分ですが、 $x \in \mathbb{C}$ でも成立します

2 Fourier 級数

ここからが講義の本題となります。Fourier 級数を定義し、それがどのようにこれまで定義した概念 (特に三角関数とその微積分) に関わっているかを見ていきます。

2.1 Fourier の予想と偏微分方程式

定義 2.1 (Fourier 級数). $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を適当な数列、 α を適当な実数とする。

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \alpha k x + b_n \sin \alpha k x)$$

を Fourier 級数という。

Fourier 級数について、この節では次の主張を検証していきます (Jean-Baptiste Joseph Fourier, 1807):

全ての関数は Fourier 級数の形で表される。

「全ての関数」ですからこの主張は極めて大胆なもので、当時の一流数学者にも正しくない予想だと批判されましたが、Fourier 級数の考え方は非常に便利なものでした。その理由を 2 つの微分方程式を例にして紹介しましょう。

理由 1 (Daniel Bernoulli, 1753) 弦の振動の数理モデルである、1 次元波動方程式

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & t > 0, 0 < x < L \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t \geq 0 \\ u(0, x) = f(x), & u_t(0, x) = g(x) \end{cases}$$

の解を求めます。ここで $t \geq 0$ は時間変数、 $0 \leq x \leq L$ は位置変数を表し、 $u(t, x)$ は時刻 t , 位置 x における弦の基準の高さからの変位を表す未知関数とします。1 式目が偏微分方程式。2 式目は弦の両端で弦の高さが 0 という固定端条件を表し、境界条件と呼ばれます。3 式目は初期時刻における弦の変位と速度を与えているので初期条件と呼ばれます。このように微分方程式に境界条件や初期条件が付いている場合、微分方程式そのものとそれ以外の付帯条件をすべて満たすもののみを解と言います。

ここで物理的考察により次のような解の形を予想します: 弦の振動は同じ動きを時間周期的に繰り返すので、解 u は時間変数のみに依存する関数と位置変数のみに依存する関数

の積に分けて書ける、つまり

$$u(t, x) = \phi(t)\psi(x)$$

となる関数 ϕ と ψ があるとします。^{*8}これを微分方程式に代入すると

$$\begin{aligned}\phi''(t)\psi(x) - \phi(t)\psi''(x) &= 0, \\ \psi(0) = \psi(L) &= 0.\end{aligned}$$

微分方程式は (恒等的に 0 という解の存在は明らかなのでそうでない解を求めるとすると)

$$\frac{\phi''(t)}{\phi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}$$

と変形できますが、この左辺は t 、右辺は x の関数なのでどちらも定数、つまり

$$\frac{\phi''(t)}{\phi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = k$$

となる実数 k が存在することになります。まず ψ の方程式 $\psi''(x) = k\psi(x)$ を考えると、 $k < 0$ のときに $\psi(x) = \sin \sqrt{-k}x$ や $\cos \sqrt{-k}x$ はこの方程式を満たすことが微分の計算でわかります。^{*9}ここでは解の見つけ方は書きませんが、 $\sin x$ や $\cos x$ が周期関数なので弦の振動を表すのに相応しく、係数をうまく合わせたと思えばよいです。特に $\psi(0) = 0$ より $\psi(x) = \sin \sqrt{-k}x$ を取る^{*10}と、 $\psi(L) = 0$ より

$$\sin \sqrt{-k}L = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-k}L = n\pi, \quad n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 < 0$$

と k の値を決めることができます。従って ψ の候補となる一連の関数

$$\psi(x) = \psi_n(x) = \sin \frac{\pi n}{L}x$$

がまず決まります。^{*11}

次にこの値と $\phi''(t) = k\phi(t)$ を用いて $\phi(t)$ を求めると、 A_n, B_n を定数として

$$\phi(t) = \phi_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{L}t + B_n \sin \frac{\pi n}{L}t.$$

^{*8} この方法は変数分離法と呼ばれます

^{*9} なぜ $k \geq 0$ ではダメなのか、どうしてこの関数が見つかるのかは、九大の理学部数学科だと 2 年後期の「微分積分統論 II」という授業を受講するとわかります。もしかしたら私が担当しているかもしれません

^{*10} $\psi'(0) = \psi'(L) = 0$ のような振動が境界で反射するような条件では $\cos$ をとる

^{*11} ここで係数を定数にしないのは、下の u_n の形にするとときに結局 A_n, B_n を置きなおすことで意味がなくなるため

従って $u(t, x) = \phi(t)\psi(x)$ より

$$u_n(t, x) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{L} t + B_n \sin \frac{\pi n}{L} t \right) \sin \frac{\pi n}{L} x$$

が微分方程式と境界条件を満たすと分かります。

ここでもう一つ次の物理的考察を加えます: 弦の振動により音が鳴るが、自然音では純音 (基礎となる周波に対応する音) だけではなく倍音 (純音の周波を自然数倍したものに対応する音) も鳴る。これは音の重ね合わせと呼ばれます。これは数学的には、 u_n を全て足し合わせた

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{L} t + B_n \sin \frac{\pi n}{L} t \right) \sin \frac{\pi n}{L} x$$

も解となる、ということです。数学では解の重ね合わせといいます。

最後に初期条件を確認すると、微分と級数は入れ替えてよいとして、 $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ より

$$(1) \quad f(x) = u(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{L} x, \quad g(x) = u_t(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\pi n}{L} \sin \frac{\pi n}{L} x$$

が成立すればよいです。 k, ℓ を整数とすると

$$\int_0^L \sin \frac{\pi k}{L} \sin \frac{\pi \ell}{L} dx = \begin{cases} L/2 & (k = \ell) \\ 0 & (k \neq \ell) \end{cases}$$

が成り立つことが (三角関数の和と積に関する公式を用いて) 分かるので、(1) の両辺に $\sin \frac{\pi n}{L}$ を掛けて積分すると

$$\int_0^L f(x) \sin \frac{\pi n}{L} dx = \int_0^L \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi k}{L} x \sin \frac{\pi n}{L} dx = A_n \frac{L}{2}$$

より、

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{\pi n}{L} dx$$

と置けば f から A_n が決まり、同様に g から B_n が

$$B_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^L g(x) \sin \frac{\pi n}{L} dx$$

と決定し、Fourier 級数の計算だけで解を完全に決定できました。^{*12}

理由 2: (Fourier, 1807) 熱の拡散の数理モデルである、熱方程式

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & t > 0, 0 < x < L \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t \geq 0 \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$

の解を求めます。波動方程式のときと同様 $u(t, x) = \phi(t)\psi(x)$ とすると、先ほどと同様の考察で

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = k \in \mathbb{R}$$

なる k が存在します。 ψ に関しては先ほどと全く同様に、 $k = -\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$,

$$\psi(x) = \psi_n(x) = \sin \frac{\pi n}{L} x, \quad n \in \mathbb{N}$$

までは同様。この k に対し、 $\phi'(t) = k\phi(t)$ を解くと A_n を定数として

$$\phi_n(t) = A_n e^{-\frac{\pi n}{L} t},$$

従って $u_n(t, x) = \phi_n(t)\psi_n(x)$ として解を重ね合わせると

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{\pi n}{L} t} \sin \frac{\pi n}{L} x.$$

これが初期条件を満たすためにはやはり波動方程式のときと同じ計算から

$$f(x) = u(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{L} x$$

と置けばよく、上と同じ級数が出てくることが分かりました。

これらの結果は偏微分方程式の最初期の研究成果で、当時の重要な問題を同様の手法で解くことができたということが Fourier の大胆な予想につながったものと考えられます。

Fourier の主張を現代的に、もう少し厳密に言い表すため、以下のような考察を加えます：
 $[0, L]$ で定義された関数 f の Fourier 級数を考えるとき、 f が奇関数 ($f(-x) = -f(x)$)

^{*12} 三角関数の重ね合わせで解が表せる、というのは Bernoulli の発見なのですが、 A_n, B_n が具体的に決まるといのは Fourier の発見のようです。熱方程式への応用と合わせこの方法が非常に応用範囲の広い方法であると気づいた Fourier の名が理論に冠されているのはそのためようです

ならば区間を $[0, L]$ から $[-L, L]$ にして f を奇関数拡張

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (x > 0) \\ -f(-x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

するとこれも奇関数なので $\sin \frac{\pi n}{L} x$ の級数で書いて、同様に g が $[0, L]$ 上の偶関数 ($g(-x) = g(x)$) であれば偶関数拡張

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} g(x) & (x > 0) \\ g(-x) & (x \leq 0) \end{cases}$$

は $\cos \frac{\pi n}{L} x$ の級数で書けます。これらは $\sin$ が奇関数、 $\cos$ が偶関数であることによります。一般の関数は

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

と奇関数と偶関数の和に書けます。これらの Fourier 級数表示はそれぞれ $\sin$ のみ・ $\cos$ のみで表せます。従って区間 $[0, L]$ で定義された関数はまず $[-L, L]$ 上にそれぞれ奇関数・偶関数部分を奇関数・偶関数拡張し、さらに周期 $2L$ で $\mathbb{R}$ 上の周期関数として拡張することができます。拡張された関数の $[-L, L]$ 上での Fourier 級数を $[0, L]$ で考えたものは、拡張する前のそれと一致するはずですので

$$F(x) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{\pi n}{L} x + B_n \cos \frac{\pi n}{L} x \right)$$

となるでしょう。ここで Euler の公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を思い出すと、 $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ を複素係数の列として

$$(2) \quad F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i \frac{\pi n}{L} x}$$

と変形することができます。以下計算の単純さのため $L = \pi$ とすると、 $m, n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

($n \neq m$ のときの計算は、複素数ですが形式的に実数のときのように $\int_a^b e^{cx} dx = [e^{cx}/c]_a^b$ となること、 $N \in \mathbb{N}$ に対し $e^{iN\pi} = e^{-iN\pi} = (-1)^N$ であることを用いるとできます) より先の計算のように (2) の両辺に e^{-inx} を掛けて $[-\pi, \pi]$ 上で積分すると

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx} dx$$

になるはずと分かります。ここで主張を定式化しましょう:

— Fourier の予想を問の形にすると —

Q1. どのような関数 F に対して (2) の右辺が収束するか?

Q2. (2) の右辺が収束するとして、どのような関数 F に対して等式は成立するか (ある関数とその Fourier 級数表示は一致するか)?

Fourier の主張そのままだと定式化に困るのは、当時は「関数」「極限」「級数の収束」「連続性」という Fourier 級数を論じるための基礎的概念がまだ定義の発展途上にあったため、どのような対象に対して級数展開を考えるべきか・Fourier 級数が収束するとはどういうことか・極限と微分や積分が交換できるのはどのような場合かということが曖昧なままであったということです。しかし以下の例に見るように、不連続な関数であっても Fourier 級数が意味を持つことがあり、応用可能な範囲が非常に広い強力な手法である、ということは徐々に認知されました。ですので、Fourier の理論の厳密化を行うことは 19 世紀の解析学の発展と厳密化を大きく促しました。このような歴史的経緯は授業では触れる機会はあまりないと思いますが、そのように発展した理論は、九大理学部数学科の授業としては 1 年生の「微分積分学」から 3 年生の「解析学 I, II」で非常に多くの事柄を学びますのでそこで学習してほしいと思います。^{*13}

2.2 Fourier 級数で遊ぶ

先延ばしにしていたが、Fourier 級数で得られる面白い式をいくつか紹介します^{*14}:

例 1: $f(x) = 1$ ($0 \leq x \leq \pi$), $= -1$ ($-\pi \leq x < 0$) とするとこれは奇関数^{*15}なので $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin nx$ と展開される。 $-\pi$ から π までの区間の長さは 2π だから、先に得た公式から

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & (n \text{ 奇数}) \\ 0 & (n \text{ 偶数}) \end{cases} \end{aligned}$$

^{*13} 以下「〇年生で習います」という註を時々入れますが、特に断らない限り九大理学部数学科のカリキュラムに沿うものとします 将来の学習や予習の参考にしてください

^{*14} 以下で得られる等式自体は別の証明方法が先行していますが、Fourier 級数を使うと比較的単純かつ類似の計算で得られるところが利点です

^{*15} 厳密には $f(0) = 0$ と定義しないと奇関数ではありませんが、積分では 1 点の値の違いは無視されるのでいちいち修正しないことが多いです

なので

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

特に $x = \frac{\pi}{2}$ とすると

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots.$$

例 2: $f(x) = \pi - |x| = \pi - x$ ($0 \leq x \leq \pi$), $= \pi + x$ ($-\pi \leq x \leq 0$) とするとこれは偶関数なので $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos kx$ と展開される。このとき両辺に $\cos nx$ を掛け $[-\pi, \pi]$ 上で積分すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = \begin{cases} \pi & (k = n \geq 1), \\ 0 & (k \neq n, n \neq 1), \end{cases} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \begin{cases} 2\pi & (k = 0), \\ 0 & (k \geq 1), \end{cases}$$

であることに注意して $n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|) \cos nx dx &= 2 \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos nx dx \\ &= \left[\frac{2}{n} (\pi - x) \sin nx \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} (-1) \sin nx dx = \frac{2}{n^2} [-\cos nx]_0^{\pi} = \begin{cases} \frac{4}{n^2} & (n \text{ 奇数}) \\ 0 & (n \text{ 偶数}), \end{cases} \end{aligned}$$

また $n = 0$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|) dx = 2 \int_0^{\pi} (\pi - x) dx = [-(\pi - x)^2]_0^{\pi} = \pi^2.$$

すなわち

$$B_0 = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}, \quad B_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)^2} \frac{1}{\pi} = \frac{4}{\pi(2n-1)^2}.$$

従って

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

を得ます。ここで $x = 0$ とおくと $\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

さらに $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ とおくと、奇数部分と偶数部分に分けて

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4} \Leftrightarrow S = \frac{\pi^2}{6}.$$

これは Basel 問題と呼ばれる Euler の非常に重要な結果です (1734 年提出、1741 年受理)。同じ手法の応用として、自然数の偶数冪の逆数和 $S(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{2k}$ も計算できるようです。

2.3 Fourier 級数の収束に関する条件

以下 f は $[-\pi, \pi]$ 上の関数 (を周期 2π で $\mathbb{R}$ 上に拡張したもの)、

$$S_N[f](x) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{inx}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

とします。 $N \rightarrow \infty$ のとき、 $S_N[f]$ が元の関数 f に収束するか、収束するならばどのような意味であるのかについて、いくつか重要な結果を抜粋します。

- f と f' が連続ならば $S_N[f] \rightarrow f$ が一様収束の意味で成り立ちます。「一様収束」という概念は 1 年生で習いますが、概ね「 $S_N[f]$ のグラフが f に収束する」と思ってください。
- (Dirichlet, 1829) f が区分的連続かつ区分的単調関数ならば

$$S_N[f](x) \rightarrow \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) + f(x-h)),$$

特に f が点 x で連続ならば $S_N[f](x) \rightarrow f(x)$. f の微分に関する条件がない分上の結果より弱い仮定ですが、 f が不連続な点では一般に各点収束しか言えません。この言葉も 1 年生で習いますが、グラフ全体が収束するようなものではない、ということです。これが最初の数学的に厳密な収束に関する結果です。

- (Lipschitz, 1864) ある $M > 0$ と $\alpha \in (0, 1]$ が存在し、任意の $x, y \in [-\pi, \pi]$ に関して $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$ ならば $S_N[f](x) \rightarrow f(x)$ (各点収束)。このような f の条件を Lipschitz 条件と言いますが、大学では Fourier 級数の授業ではなく常微分方程式の授業で見かけるでしょう。
- (du Bois-Raymond, 1875) ある連続関数 f とある点 $x_0 \in [-\pi, \pi]$ に対し、 $S_N[f](x_0) \not\rightarrow f(x_0)$. つまりある点で Fourier 級数の値と元の関数の値が、関数が連続であっても一致しないことがあるということで、Fourier の予想に対する 1 つの否定的解答となります。

- (Jordan, 1881) f が有界変動関数ならば $S_N[f](x) \rightarrow f(x)$ (各点収束)。有界変動という言葉の定義は専門的すぎるのでここでは省略します。
- (Fejér, ?) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{n^3}x)}{n^2}$ ($0 \leq x \leq \pi$) を $[-\pi, \pi]$ 上偶関数拡張したものを $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos nx$ と書くと、これは $x=0$ で発散する (特に Fourier 級数と元の関数は一致しない)。上述の du Bois-Raymond の証明は分かりにくかったため、分かり易い関数で不一致が示された例です。
- (Fejér, 1900) f 有界かつ (Riemann) 積分可能、 x_0 で連続ならば $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} S_k[f](x_0) \rightarrow f(x_0)$ 。これは $S_N[f]$ そのものの収束ではなく、その平均が f に各点収束するということを言っています。^{*16}元の $S_N[f]$ が収束しなくても平均を取っているので「外れ値」の効果が $N \rightarrow \infty$ でなくなるということを言っています。特に $f(\pi) = f(-\pi)$ かつ f 連続ならば全ての $x \in [-\pi, \pi]$ に関して上の収束が言えます。

以上の級数の総和可能性は、主に関数の連続性と各点収束を結びつけるものでした。しかし本来連続性と積分可能性は独立していて、積分の条件から Fourier 級数の収束を論じる結果も現れます。それを述べるため 1 つ定義をします。

定義 2.2 (L^p). $p \geq 1$ とする。 f が $[a, b]$ 上 p 乗可積分可能であるとは

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$$

であるときをいう。^{*17}このとき $f \in L^p(a, b)$ と書く。積分範囲が明らかな場合、以下では区間を省略して単に L^p と書く。

$L^p(-\pi, \pi)$ と Fourier 級数展開に関する結果には以下のような結果が知られています:

- (Lebesgue, 1905) $f \in L^1$ ならば「殆ど全ての」 $x \in [-\pi, \pi]$ に対して $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} S_k[f](x) = f(x)$ 。この「殆ど全て」という用語にはきちんとした数学的定義があるのですが、ちゃんと定義するのは非常に難しいのでここでは省略します。3 年生で習います。
- (Riesz, Fischer, 191?) $f \in L^2$ ならば $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx \rightarrow 0$ 。これは L^2 収束と呼ばれます。
- (Kolmogorov 1923) ある $f \in L^1$ が存在し、殆ど全ての x で $S_N[f](x) \not\rightarrow f(x)$ 。

^{*16} このような級数が意味を持つとき、Cesaro 総和可能と呼ばれます

^{*17} 厳密にいうとこの積分は Lebesgue 積分の意味です。3 年生になると習います。

- (Carleson^{*18} 1966) $f \in L^2$ ならば殆ど全ての x で $S_N[f](x) \rightarrow f(x)$. このことは 1913 年に Lusin によって予想されましたが、解決まで 50 年以上かかりました。
- (Hunt, 1967) $p > 1$, $f \in L^p$ ならば殆ど全ての x で $S_N[f](x) \rightarrow f(x)$. 本質的にはこれは Carleson の結果の応用です。

その他 Riemann, Heine, Lusin, Steinhaus, Cantor も Fourier 級数の収束に関する結果を残しています。もし皆さんが解析学を深く学べば、ここまでに列挙した名前を関した定理を多く学ぶことになります。各時代多くの著名な数学者がこの問題に携わったという事実が、Fourier 級数に関する研究が解析学の主要テーマの 1 つであったことの証左になるかと思います。次章で紹介する Fourier 変換と合わせこの理論は Fourier 解析と呼ばれますが、その先にある現代的な問題を扱う分野は調和解析と呼ばれ、研究が活発な分野のひとつです。

^{*18} 2006 年 Abel 賞受賞者

3 Fourier 変換

3.1 Fourier 変換と急減少関数

Fourier 級数は周期関数に関して定義されましたが、有界閉区間で定義された関数であれば周期関数として拡張できるため、そのような関数に対する強力な解析手法となります。一方 $\mathbb{R}$ で定義された関数には非周期関数で重要なものが多いですが、そのような関数に対する類似の解析手法が Fourier 変換となります。

$[-L/2, L/2]$ 上で定義された関数を周期 L で $\mathbb{R}$ 上の関数に拡張したものの Fourier 級数展開を思い出すと、

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i}{L} nx}, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) e^{-\frac{2\pi i}{L} nx} dx.$$

$\mathbb{R}$ 上の関数 f を Fourier 級数を用いて近似するため、 $[-L/2, L/2]$ で打ち切って周期化し、 $L \rightarrow \infty$ とすることを考えてみます。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(y) e^{2\pi i \frac{n}{L} (x-y)} dy \\ &\xrightarrow{L \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{2\pi i \xi (x-y)} dy d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i y \xi} dy \right) d\xi. \end{aligned}$$

ここで $L \rightarrow \infty$ の極限は形式的なもので、 L を区間 $[-L/2, L/2]$ の分割幅と考えた場合の区分求積法に相当するため、 n/L が変数 ξ に置き換わり ξ 積分が表れます。よって次の形式的定義に辿り着きます:

定義 3.1 (Fourier 変換).

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i y \xi} dy$$

を f の Fourier 変換、

$$\mathcal{F}^{-1}[g](x) = \check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

を g の逆 Fourier 変換という。

名前に $\mathcal{F}^{-1}$ は $\mathcal{F}$ の逆変換のようで、実際そうなのですが、この定義の段階ではそれは示されていないし仮定もしていないことに注意してください。また、指数の符号の違いから $\mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}^{-1}[f](-\xi)$ ^{*19}なので定義だけならどちらか一方が $\mathbb{R}$ 上定義されればもう片方も定義可能であることを注意しておきます。

問

この定義は形式的なもの。どのような関数ならば $\mathcal{F}[f]$ が定義できるか? また $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[f] = f$ (Fourier 反転公式という) が成り立つのはいつか?

例: ある定数 $C > 0$ が存在し $|f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$ が成立するような関数 f を考えます。このとき

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = [\text{Tan}^{-1}x]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

が知られています。^{*20}ただし $y = \text{Tan}^{-1}x$ とは $\tan$ の逆関数、つまり与えられた x に対し $x = \tan y$ なる y を返す関数です (数 III を習った人は $x = \tan y$ という変換でも計算できます)。Euler の公式と複素数の絶対値の定義より $|e^{ix}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$ なので、 f が与えられた不等式を満たすと

$$|\mathcal{F}[f](\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{C}{1+x^2} dx = C\pi < \infty,$$

つまり全ての $\xi \in \mathbb{R}$ について f の Fourier 変換 $\mathcal{F}[f](\xi)$ は確定します。しかし一般に $|\mathcal{F}[f](\xi)| \leq \frac{C}{1+\xi^2}$ かどうかは分からないので、逆 Fourier 変換が定義できるかどうかは不明です。

上の例から推察できるように、逆 Fourier 変換が定義され $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = f$ を言うためには、 f 自身の減少評価だけではなく、Fourier 変換の減少評価も得られるような関数の集合を選んで変換しなくてはなりません。そのような関数の集まりとして適当なのは以下のものです:

定義 3.2 ((Schwartz^{*21}) の急減少関数). f が急減少関数であるとは、 f は無限階連続的微分可能 (何回微分しても連続、 $C^\infty(\mathbb{R})$ とかく) で、任意の非負整数 $\alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に

^{*19} 高校生のうちは積分変数の文字に意味はなく $\int f(x)dx$ でも $\int f(y)dy$ でも一緒であることを見落とす人がいますが、ここも同じ点に注意

^{*20} このような無限区間での積分は広義積分と言います。1 年生で習います。

^{*21} 1950 年 Fields 賞受賞者

対しある $C_{\alpha,\beta} > 0$ が存在し、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|x^\alpha f^{(\beta)}(x)| \leq C_{\alpha,\beta}$$

が成立することである。ここで $f^{(\beta)}$ は f の β 階微分である。

集合 A 上の急減少関数全体を $\mathcal{S}(A)$ とかく (特に $A = \mathbb{R}$ の場合 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を以下ではよく使う)。急減少関数は Schwartz 関数とも呼ばれる。

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に属する関数の最も典型的な例は

$$f(x) = e^{-ax^2}$$

(但し $a > 0$) です。統計の言葉でいえば正規分布 (の $\mathbb{R}$ 上の積分を 1 にするような定数を無視したもの) です。これにいくら多項式を掛けても指数減衰のほうが速く、かつ何回微分しても (多項式) $\times e^{-ax^2}$ の形になるのでやはりこれに多項式を掛けても $|x| \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束します。

この定義の背景を理解するために、次の Fourier 変換と微分に関する事実を確認します：
 f の微分 $\frac{df}{dx}$ を Fourier 変換すると

$$\mathcal{F}\left[\frac{df}{dx}\right](\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = [f(x) e^{-2\pi i x \xi}]_{-\infty}^{\infty} + 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

ここで 2 つめの等式は部分積分です。もし f が $x \rightarrow \pm\infty$ で十分速く 0 に減衰する関数ならば $[\dots]_{-\infty}^{\infty} = 0$ です。よって

$$\mathcal{F}\left[\frac{df}{dx}\right](\xi) = 2\pi i \xi \mathcal{F}[f](\xi),$$

また逆に Fourier 変換を微分するとき、 ξ 微分と x 積分が交換可能であるとすると

$$\frac{d}{d\xi} \mathcal{F}[f](\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = -2\pi i \mathcal{F}[xf](\xi),$$

まとめると

$$\mathcal{F}\left[\frac{df}{dx}\right](\xi) = 2\pi i \xi \mathcal{F}[f](\xi), \quad \mathcal{F}[xf](\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}[f](\xi)$$

となり、Fourier 変換によって「多項式の掛け算と微分が入れ替わる」ことがわかります。このことは「Fourier 変換は減衰と滑らかさを交換し合う」と表現できます：

f が速く減衰する $\Leftrightarrow \hat{f}$ が沢山微分できる： $\hat{f}$ が速く減衰する $\Leftrightarrow f$ が沢山微分できる

特に、逆 Fourier 変換の定義可能性のために

$$|\mathcal{F}[f](\xi)| \leq \frac{C}{1+\xi^2}$$

という条件を課すには f の 2 階微分が Fourier 変換可能であることが必要で、さらにそのためには $\hat{f}$ の 4 階微分が逆 Fourier 変換可能で、 $\dots$ と入れ子状に条件を遡ることになりますが、要は f が初めから無限の微分可能性、そして $\hat{f}$ が同じ条件を満たすために f が多項式と比較して無限の減少度をもっていれば $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}^{-1}$ で元の関数の世界と Fourier 変換した関数の世界を自由に行き来できそうだと予想できます。これが $\mathcal{S}$ で Fourier 変換を考える理由で、実際そのことは正しく次が示せます:

定理 3.3. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x) \Leftrightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi)$. つまり急減少関数は $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ で急減少関数に移る。

証明の概略. 逆 Fourier 変換は符号の反転を用いて Fourier 変換で表せることから、 $\Rightarrow$ だけ示せば十分。 α と $\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ を固定します。

$$\left| \xi^\alpha \left(\frac{d}{d\xi} \right)^\beta \mathcal{F}[f](\xi) \right| = C \left| \mathcal{F} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^\alpha \{x^\beta f\} \right] \right|.$$

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であれば、 f に x^β を掛けても $\in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ である (何度微分しても $(x$ の多項式) $\times$ (f の微分) の形になるが、これに x の何乗を掛けても $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ならば有界) であり、さらにそれに $(d/dx)^\alpha$ を作用させたものも $\in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ です ($\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の定義に、 f ではなく $f^{(\alpha)}$ を入れて考える)。従ってある $C_{\alpha,\beta} > 0$ が存在し

$$\left| \left(\frac{d}{dx} \right)^\alpha \{x^\beta f\} \right| \leq \frac{C_{\alpha,\beta}}{1+x^2}$$

となるので、この左辺の関数の Fourier 変換は定義されて有界。 α と β の任意性から $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

また急減少関数に対しては Fourier 反転公式が成立します。

定理 3.4. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ならば $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[f] = f$.

この定理の証明は概略でももう少し準備が要るので後に回します。4.2 節参照。

3.2 Fourier 変換の偏微分方程式への応用

以上で Fourier 変換を道具とする舞台そのものは整いましたが、偏微分方程式への応用を考え次の定義をします:

定義 3.5 (合成積). 関数 f と g の合成積 $f * g$ を、

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy$$

で定義する (積分が意味を持つならば必ずしも $f, g \in \mathcal{S}$ でなくてもよい)。

後で使うので、合成積の微分は片方の関数のみ微分すれば良いことを注意します:

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) = f' * g(x) = f * g'(x).$$

これは合成積の定義で微分と積分が交換できると思えば形式上すぐに得られます。このことから、滑らかでない関数 f と滑らかな関数 g の合成積の微分は、後者に微分を押し付けられよいので定義できることが分かります。このように、滑らかでない関数に滑らかな関数との合成積を作用させて滑らかにできるということが合成積の利点です。

定理 3.6. $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$. つまり合成積は Fourier 変換で (通常の) 積に移る。

これが証明できると、反転公式より $\widehat{fg}(\xi) = \hat{f} * \hat{g}(\xi)$ となること、つまり関数の積と合成積は Fourier 変換で移り合うことが分かります。

証明.

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \right) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) e^{-2\pi i (x-y)\xi} e^{-2\pi i y \xi} dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(z)g(y) e^{-2\pi i z \xi} e^{-2\pi i y \xi} dy dz = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

3 番目の等式では $x - y = z$ という変換を行い、4 番目は積分の順番を交換しました。□

偏微分方程式への応用: 今度は熱方程式を $\mathbb{R}$ 上で考えます、つまり

$$\begin{cases} u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

の解を求めます。方程式の両辺を x に関して Fourier 変換すると、 t 微分と $\mathcal{F}$ の順序は入れ替えられるので x 微分のみ $2\pi i \xi$ を掛けることに置き換わり、

$$\mathcal{F}[u_t(t, \cdot)](\xi) = \hat{u}_t(t, \xi), \quad \mathcal{F}[u_{xx}(t, \cdot)](\xi) = (2\pi i \xi)^2 \hat{u}(t, \xi)$$

となります。従って方程式は

$$\begin{cases} \hat{u}_t(t, \xi) - 4\pi^2 \xi^2 \hat{u}(t, \xi) = 0, & t > 0, \xi \in \mathbb{R}, \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

に変換されます ($i^2 = -1$ に注意)。これは ξ を止めると t に関する常微分方程式なので

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}_0(\xi) e^{-4\pi^2 \xi^2 t}$$

が解で、これを逆 Fourier 変換して

(3)

$$u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}_0 e^{-4\pi^2 \xi^2 t}](x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}_0] * \mathcal{F}^{-1}[e^{-4\pi^2 \xi^2 t}](x) = u_0 * \mathcal{F}^{-1}[e^{-4\pi^2 \xi^2 t}](x)$$

なのですが、あとは指数関数の逆 Fourier 変換を求めれば解が求まりそうです。これは上手く計算できることが知られています:

定理 3.7. $f(x) = e^{-\pi x^2}$ ならば $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2} (= f(\xi))$.

この f は平均 0 の正規分布 (の係数を無視したもの) ですから、標語的に「正規分布の Fourier 変換は正規分布」ということができます。^{*22}

証明の概略. $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$ なので^{*23} $e^0 = 1$ を用いて

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^0 dx = 1 = f(0).$$

また $f'(x) = -2\pi x f(x)$ を Fourier 変換すると、微分と多項式倍の変換により

$$2\pi i \xi \hat{f}(\xi) = -i \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) \Leftrightarrow \hat{f}'(\xi) = -2\pi \xi \hat{f}(\xi).$$

つまり f と $\hat{f}$ は同じ微分方程式と同じ初期条件を満たすので^{*24} $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$. □

この結果を (3) に代入したいのですがもう一工夫、一般に $a \in \mathbb{R}$ に対し変数変換により

$$\mathcal{F}[f(a \cdot)](\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(ax) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \frac{y}{a} \xi} \frac{dy}{a} = \frac{1}{a} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

^{*22} これが理由の一つとなって、Fourier 変換は確率論や統計学でも基礎的な道具のひとつです

^{*23} この式は 1 年生で習います 面白いのは 1 変数ではなく多変数の積分の応用として計算することです

^{*24} これは常微分方程式の解の一意性と呼ばれ、「行儀のよい」方程式なら成立します 2 年生で習います

が成立することに注意します。つまり

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-4\pi^2\xi^2t}](x) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-\pi^2(\sqrt{4\pi t}\xi)^2}](x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\pi(\frac{x}{\sqrt{4\pi t}})^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

であり、この関数を $H_t(x)$ とおいて^{*25}(3) に代入すると

$$u(t, x) = u_0 * H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

が解として求められました。このように、Fourier 変換には偏微分方程式を常微分方程式に変換する作用があり、偏微分方程式の研究において重要な道具となっています。特に H_t は熱核と呼ばれ、偏微分方程式以外にも解析学ではしばしば現れます。

同じように波動方程式

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & u_t(0, x) = u_1(x) \end{cases}$$

も考えることができます。答だけ書いておくと

$$u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}[\cos(2\pi t|\xi|)] * u_0(x) + \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(2\pi t|\xi|)}{2\pi|\xi|}\right] * u_1(x)$$

です。 $\mathcal{F}^{-1}$ のままになっている所は実はまだ意味付けができませんが、次章で扱う緩増加超関数として計算できることが知られていて、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\cos(2\pi t|\xi|)](x) &= \frac{1}{2}(\delta(x+t) + \delta(x-t)), \\ \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(2\pi t|\xi|)}{2\pi|\xi|}\right](x) &= \frac{1}{2}(H(x+t) - H(x-t)) \end{aligned}$$

となります。この右辺の意味についても次章をご覧ください。

$\mathcal{S}$ 上の Fourier 変換は非常に強力な手法ですが、限界も色々あります。実用上すぐに気づくのは次のことです:

問題: 解は $\mathcal{S}$ に限っている。これは解の挙動としては非常に限定されたもので、物理的状況を扱うには関数の数が少なすぎる。

例 (微分方程式の微分できない解): 定数 $h > 0$, $0 < p < \pi$ を固定し、波動方程式

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, & t > 0, x \in [0, \pi], \\ u(0, x) = f(x) = \begin{cases} xh/p & (0 \leq x \leq p), \\ h(\pi - x)/(x - p) & (p \leq x \leq \pi), \end{cases} & u_t(0, x) = 0 \end{cases}$$

^{*25} 下付きの t は t 偏微分ではないことに注意

を考えます。この初期条件は弦の 1 点 p を高さ h まで摘まみ上げた形をしていて、微分可能ではないことに注意します。Fourier 級数を前に述べた方法で計算すると

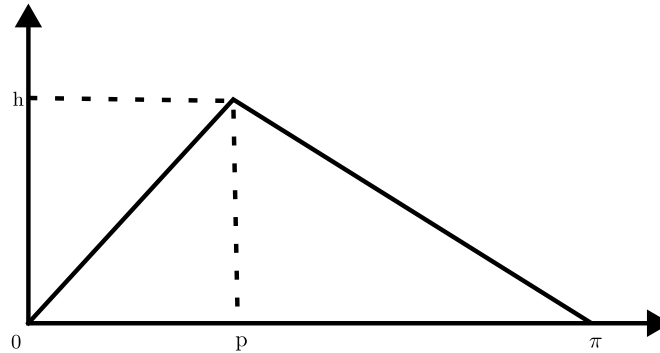


図 8 初期条件のグラフ [4] p.17 の図を再作成

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2h}{p(\pi - p)} \frac{\sin mp}{m^2} \cos mt \sin mx$$

を得ます。これは

$$|u(t, x)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2h}{p(\pi - p)} \frac{1}{m^2} = \frac{2h}{p(\pi - p)} \frac{\pi^2}{6} < \infty$$

より全ての点で定義されますが、級数を形式的に微分し u_{tt} や u_{xx} の形式的級数を作ってみると収束しません ($1/m^2$ のような収束を担保する項がなくなるので)。一方、 f を $[0, \pi]$ から $[-\pi, \pi]$ 上に奇関数拡張しさらに周期 2π で $\mathbb{R}$ 上に拡張すると u は $\mathbb{R}$ 上

$$u(t, x) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

で与えられます (D'Alembert の公式という)。 f には微分できない点があるので、この表示からも u は微分できないことがわかります。

このような問題に対して $\mathcal{S}$ に属する解を期待するのは難しいです。特に方程式に現れるはずの u_{tt} や u_{xx} の意味付けに困りますが、これは次章で述べるように微分の意味、そして微分方程式の解の意味を拡張することにより克服できます。

この講義録では以下 Fourier 解析の応用として偏微分方程式を考えますが、この方法は解析学にとどまらず (他の解析学の内容との協働によって) 幾何学や代数学の問題にも用いられるということを注意として述べておきます。そのような応用として

- 長さが一定の閉じた曲線が囲む面積を最大にするものは円である (等周不等式)

- α を無理数として $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$ という数列の小数部分を考えると、 $[0, 1)$ の間の任意の小数にいくらでも近いものが取れる (Weyl の一様分布定理)
- 自然数 q と ℓ の最大公約数が 1 ならば数列 $\ell, \ell + q, \ell + 2q, \dots$ の中に無限個の素数が存在する (Dirichlet の定理)

が挙げられます。これに関しては [4] をご覧ください。

さらに、情報を周波数に分解して解析することから Fourier 解析は工学的応用が非常にたくさんあります。私はこのような応用の専門家ではないので、ChatGPT に聞いたことを以下引用します:

(坂本) フーリエ解析の工学的応用について教えてください
(ChatGPT)

フーリエ解析 (Fourier analysis) は、**周期的または非周期的な信号を周波数成分に分解**する数学的手法です。これにより、複雑な波形を**正弦波や余弦波の組み合わせ**として理解・処理できるようになります。工学のさまざまな分野で非常に重要な役割を果たしています。

—

フーリエ解析の工学的応用分野

1. **信号処理**

* **音声・音楽処理** (例: MP3 圧縮、ノイズ除去) * **画像処理** (例: JPEG 圧縮、エッジ検出) * **フィルタリング** (高周波ノイズの除去、帯域制限)

フーリエ変換で信号を周波数領域に変換し、不要な周波数成分を除去してから逆変換することで、目的の信号だけを抽出することができます。

2. **通信工学**

* **変調・復調** (AM、FM、OFDM など) * **帯域幅の設計** * **スペクトル解析**による信号の評価

通信では、フーリエ解析を使って送受信される信号の周波数帯域を最適化・設計し、干渉やノイズを避ける工夫が行われます。

3. **制御工学**

* **周波数応答解析** (ボード線図、ナイキスト線図) * **フィードバック制御系の設計**

制御対象の特性を周波数領域で把握することで、安定性や応答性を評価し、PID 制御やフィルタ設計を行います。

4. **電気回路設計**

* **交流回路解析** (インピーダンス、共振回路など) * **フィルタ回路の設計**

フーリエ解析を使えば、複雑な非正弦波交流電流も複数の周波数成分として理解でき、回路が各成分にどう応答するかが明らかになります。

5. **音響・振動工学**

* **構造物の振動モード解析** * **音響設計・騒音解析** * **地震波や車体振動の解析**

実測された振動や音響データをフーリエ変換することで、原因となる周波数帯域を特定できます。

6. **画像処理・医用画像**

* **MRI や CT スキャン**における再構成 (周波数領域から画像へ) * **画像フィルタ処理・エッジ検出**

7. **機械学習・データサイエンス**

* **時系列解析** (例: センサーデータの周期性検出) * **特徴量抽出** (周波数領域の情報を生じた学習)

よく使われる数学的手法

* **フーリエ級数** (周期信号の分解) * **フーリエ変換 (FT)** (一般信号の周波数表現) * **離散フーリエ変換 (DFT) / 高速フーリエ変換 (FFT)** (デジタル信号処理で必須)

一言でまとめると…

フーリエ解析は「時間領域」から「周波数領域」へと信号を翻訳する技術であり、**信号の性質を理解・操作・最適化するための鍵**となる手法です。

—

必要なら、具体例や数式、MATLAB や Python での実装例なども紹介できます！

だそうです。このため工学でも Fourier 解析は必須の道具となっています。

4 Schwartz 超関数

何らかの意味や概念を拡張する場合に、よくある方法は「自分ではできないことを別のものに押しつける」ということです。以下で定義する超関数とその微分はそのような方法で定義される概念のひとつです。

4.1 Schwartz 超関数とその微分

微分を「押し付けられる」ほうの関数をまず定義しましょう。

定義 4.1 (試験関数). ϕ が $\mathbb{R}$ 上の試験関数であるとは、 ϕ は無限回連続的微分可能であり、ある $R > 0$ が存在し $[-R, R]$ の外では ϕ は恒等的に 0 である。

$\mathbb{R}$ 上の試験関数全体の集合を $C_0^\infty(\mathbb{R})$ と書く。

このような関数を用いて超関数を定義します。

定義 4.2 (Schwartz 超関数). $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 上の線型連続汎関数を超関数といい、超関数全体の集合を ' をつけて $(C_0^\infty(\mathbb{R}))'$ と書く。つまり F が $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 上の超関数であるということとは、以下の 3 条件を満たすことである：

1. F は $C_0^\infty(\mathbb{R})$ から $\mathbb{R}$ への関数である。つまり各 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対し実数 $F(\phi)$ がただ一つ決まる。この対応を習慣的に

$$F(\phi) = \int_{\mathbb{R}} F(x)\phi(x)dx$$

と書く。

2. (線型性) 対応 $\phi \mapsto F(\phi)$ は線型である。つまり $\phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$ のとき

$$F(a\phi_1 + b\phi_2) = aF(\phi_1) + bF(\phi_2)$$

が成り立つ。

3. (連続性) 試験関数の列 $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ がこの空間の中である試験関数 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に収束する ($\phi_n \rightarrow \phi$ とかく) とき、実数として

$$F(\phi_n) \rightarrow F(\phi).$$

「汎関数」という言葉を定義していませんが、これは「関数の関数」として捉えられる

ものを指す用語です。条件 1 に対応しています。また Schwartz 超関数は誤解のない場合単に「超関数」と呼ぶことにします。上の定義でもそうしています。

皆さんが既に知っているような関数の殆どは超関数としても意味を持ちます。例えば $f(x) = e^x$ は $x \rightarrow \infty$ で発散し、 $\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx$ という積分は意味を持ちませんが、 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ をひとつ固定すると $f\phi$ の積分範囲は十分大きな $R > 0$ に対し $[-R, R]$ に制限されるため、

$$F(\phi) = \int_{\mathbb{R}} e^x \phi(x) dx = \int_{-R}^R e^x \phi(x) dx < \infty$$

なので e^x から超関数 F が 1 つ決まります。これは $|x|$ のように微分できない関数でも意味を持ちますし、 $\log x$ のように $(-\infty, 0]$ で定義できない関数に対しては試験関数を考える区間を $(0, \infty)$ にすると同様の定義ができます。

本質的に関数と異なる超関数で最も重要な例は次のものです：

例 (Dirac^{*26} のデルタ関数)

次のような積分値を持つ「関数」 δ を考える： $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対し

$$\int_A \delta(x) dx = \begin{cases} 1 & (0 \in A) \\ 0 & (0 \notin A). \end{cases}$$

この関数のとる値を考えてみると、0 を含まないどんな区間でもその上での積分値が 0 であることから $\delta(x) = 0$ ($x \neq 0$) と考えられます。一方 0 を含むどんなに小さな区間でも積分値は 1 なので $\delta(0)$ はいくらでも大きい値、つまり形式的に

$$\delta(x) = 0 \ (x \neq 0), \quad \delta(0) = \infty$$

とすべきでしょう。しかしながら Riemann 積分でも Lebesgue 積分でも、1 点だけ 0 でない値で他の点での値が常に 0 の関数の積分の値は 0 にしかならず、この δ は古典的な意味での関数と見做すことができません。

それではどうするかというと、 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対し $\phi(0)$ という値を返す $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 上の超関数と見ればよい、というのが厳密な定式化になります。これを形式的に

$$\delta(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \phi(x) dx = \phi(0)$$

と書きますが、もし ϕ が原点近傍で常に $\phi(x) = 1$ という値を取る関数なら、 $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \phi(x) dx = \phi(0) = 1$ となり、上の形式的積分値を復元できます。^{*27}

^{*26} 1933 年ノーベル賞受賞

^{*27} 実は δ はもっと性質の良い超関数で、 C_0^∞ の超関数ではなく C^∞ のそれと解釈するほうが良いのですが以下そのことを使わないので省略しています

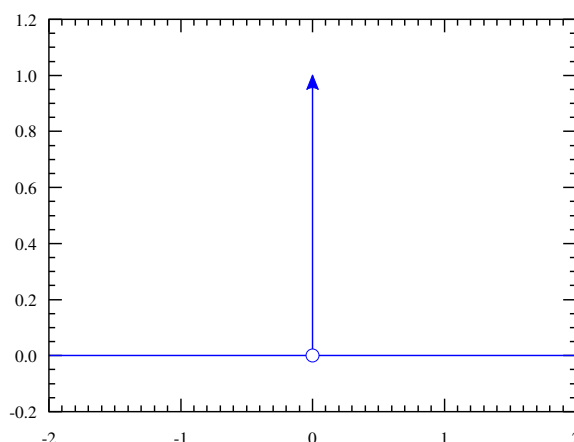


図9 デルタ関数の「グラフ」 ∞ という値は描けないので概念的に上のように描かれる https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function より引用

ちなみに超関数は普通関数と比べてものすごく特殊なものかというそうではなく、例えば先で定義した熱核を使うと $H_t \rightarrow \delta$ ($t \rightarrow 0$) が超関数の意味で成立することも示せます。 H_t のグラフを描いてみると分かりますが、値が1点に集中しその点以外では殆ど0の関数が現れるはずです。一般に任意の超関数 F に対しある試験関数の列 $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在し超関数の意味で $\phi_n \rightarrow F$ ($n \rightarrow \infty$) が成立することが言えます。

定義 4.3 (超関数の微分). 超関数 F の微分 F' を、任意の試験関数 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対し $F'(\phi) = -F(\phi')$ を満たす超関数として定める。積分で書くと

$$(4) \quad \int_{\mathbb{R}} F'(x) \phi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} F(x) \phi'(x) dx.$$

この定義を理解するためには積分形のほうが分かり易いのですが、 F は滑らかな関数で書けているとは限らないので通常の意味で微分できるかどうかは最初はわかりません。しかし仮に、 F が滑らかな関数で F' が存在しているとすると、部分積分で形式的に

$$\int_{\mathbb{R}} F'(x) \phi(x) dx = [F(x) \phi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} F(x) \phi'(x) dx$$

となるはずですが。右辺第一項は十分大きな x に対し $\phi(x)$ が0なので0と解釈すると、残った部分に (4) が表れます。従ってこれをもって超関数の微分の定義としましょう、というのが上の意味です。

例 (Heaviside 関数):

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

を Heaviside 関数と呼びます。この関数の $x = 0$ 以外での通常の微分は $H'(x) = 0$ ということは容易に定義から直接計算できます。 $x = 0$ では通常の微分は定義できませんが、 ϕ を試験関数として

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} H'(x) \phi(x) dx &= - \int_{\mathbb{R}} H(x) \phi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \phi'(x) dx = -[\phi(x)]_0^{\infty} = \phi(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \phi(x) dx, \end{aligned}$$

つまり超関数の意味で $H' = \delta$ です。この計算を見ると、「微分を試験関数に押し付ける」ということの意味がはっきりすると思います。

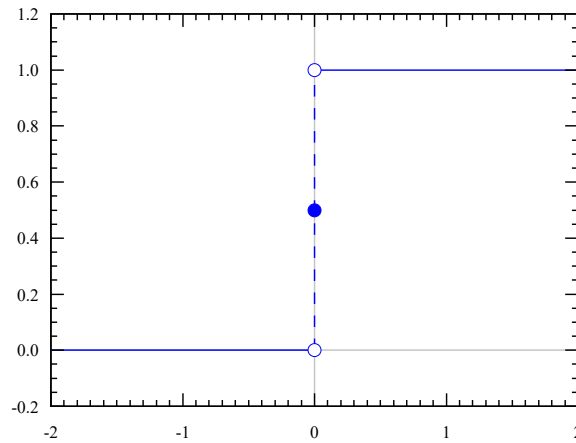


図 10 Heaviside 関数のグラフ ここでは $x = 0$ で $H(0) = 1/2$ となっているが、超関数の微分を考える際にはなんでもよい https://en.wikipedia.org/wiki/Heaviside_step_function より引用

他に一般的な超関数の微分の性質として

1. 超関数は何度でも微分可能で $\int_{\mathbb{R}} F^{(n)}(x) \phi(x) dx = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} F(x) \phi^{(n)}(x) dx$. これは試験関数は何回微分しても試験関数であることによります。
2. ある k 回連続的微分可能な関数 f を用いて $F(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi(x) dx$ で与えられる超関数の ℓ ($0 \leq \ell \leq k$) 階微分は f の通常の微分 $f^{(\ell)}$ と一致します。この意味でも超関数の微分は通常の微分の拡張になっています。

4.2 緩増加超関数とその Fourier 変換

前節で微分という概念を拡張することができましたが、もうひとつ Fourier 変換も超関数に拡張できると後々大変便利です。超関数の微分は微分の試験関数への押し付けによって定義できたので、超関数の Fourier 変換も Fourier 変換の押し付けで定義できないかと考えてみましょう。そのためには Fourier 変換がきちんと定義できる C_0^∞ ではなく $\mathcal{S}$ 上の超関数が必要ですが、それが以下の定義です。

定義 4.4 (緩増加超関数). $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の線型連続汎関数を緩増加超関数といい、その全体を $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ で表す。つまり定義 (4.2) の $C_0^\infty(\mathbb{R})$ となっている部分を、すべて $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に置き換えたものが緩増加超関数の定義となる。

「急減少」の反対で「緩増加」となるのが名前の由来です。

例 f が高々多項式程度の増大度を持つ関数、つまりある $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ と $C > 0$ が存在し全ての $x \in \mathbb{R}$ に対し $|f(x)| \leq C|x|^N$ が成立する関数とすると、 $F(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx$ で定義される超関数 F は緩増加超関数です。これは $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ であれば $|\phi(x)| \leq \frac{C_N}{1+x^{N+2}}$ となるような $C_N > 0$ が存在するので積分が定義できるからです。

もし $|f(x)| \leq Ce^{ax}$ ($a > 0$) だとこの関数の増大が速すぎて、急減少関数との積の積分が一般には定義できないことに注意します。従ってこの関数は超関数にはなりませんが緩増加超関数にはなりません。つまり $\mathcal{S}' \subset (C_0^\infty)'$ ですが、これは $C_0^\infty \subset \mathcal{S}$ という包含関係と対応していることを注意しておきます。

定義 4.5 ($\mathcal{S}'$ 上の Fourier 変換). $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ の Fourier 変換 $\hat{F}$ を、全ての試験関数 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し $\hat{F}(\phi) = F(\hat{\phi})$ をみたす緩増加超関数として定義する。積分形では

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{F}(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} F(x)\hat{\phi}(x)dx.$$

これは前章で証明しなかった次の事実に依拠しています: $\phi, \psi \in \mathcal{S}$ ならば

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x)\psi(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(\xi)e^{-2\pi i x \xi}d\xi \right) \psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} \psi(x)dx \right) d\xi \\ (5) \quad &= \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi)\hat{\psi}(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

つまり急減少関数同士の積の積分では、一方の $\hat{\cdot}$ をもう一方に移すことができます。実は超関数の時のように、緩増加超関数 F に対しても $\{\phi_n\} \subset \mathcal{S}$ で $\phi_n \rightarrow F$ となるものがあるので、近似列に対して $\hat{\cdot}$ を押し付けておいて、それから極限を取ると上の定義に行きつ

きます。通常の関数を緩増加超関数と見るには先に述べた増大度の制約 $|f(x)| \leq C|x|^N$ さえ満たせばよいので、不連続な関数や遠方で増大する関数にも Fourier 変換の意味付けができ、 $\mathcal{S}$ 上のみで定義されていた Fourier 変換の範囲が大きく広がりました。

ここで上の事実を用いて、先延ばしにした Fourier 反転公式の証明の概略を記しておきます。 x_0 を固定し $f(x_0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x_0 \xi} d\xi$ を示せば十分です。(5) で x 変数と ξ 変数を入れ替えて、 $\phi(x)$ の代わりに $f(x + x_0)$, ψ の代わりに $\hat{g}(\xi) = e^{-\pi \varepsilon \xi^2}$ となる g をとると、定理 3.7 とそのあとの注意から $g(x) = \varepsilon^{-1/2} e^{-\pi x^2 / \varepsilon}$ となります。 $\widehat{f(x + x_0)}[\xi] = \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi}$ に注意して

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x_0 \xi} e^{-\pi \varepsilon \xi^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x + x_0) \varepsilon^{-1/2} e^{-\pi x^2 / \varepsilon} dx.$$

ここで $K_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1/2} e^{-\pi x^2 / \varepsilon}$ とおくと、 $\int_{\mathbb{R}} K_{\varepsilon}(x) dx = 1$ かつ任意の $\delta > 0$ に対して $\int_{|x| > \delta} K_{\varepsilon}(x) dx \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) が成立し、これを用いると ε - δ 論法により右辺は $f(x_0)$ に収束することが言えます。以上が概略です。

現代的偏微分方程式論のよくある流れとして、

1. 考察する方程式が超関数の意味での解 (弱解という) を持つことを示す (解の存在)
2. 上で得た弱解が何らかの良い性質 (可微分性、可積分性、etc.) や何らかの性質 ($t \rightarrow \infty$ のときの挙動やその近づき方など) を満たすことを示す、特に可微分性が十分高ければ通常の意味での解 (古典解という) になる

という手順が取られます。ここでは解の存在とその具体形が比較的単純に得られる方程式しか扱うことはできませんが、普通はまず解が適当な意味で存在するかどうかを確認しなくてははいけません。そのとき、単なる関数の世界では狭すぎる 경우가多く、出来るだけ広い範囲から候補を撮らないと見つからない、ということが現代で扱われる問題ではしばしばあります。そこで超関数のようなより広い探索範囲において広い意味の解を探し、必要があればさらに良い条件を満たして、特に古典解になる、という 2 段階の方法を取ることが多いです。

4.3 基本解

前節最後に書いた弱解の話を、より一般的な偏微分方程式へ拡張します。

定義 4.6 (基本解). d 次元の多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$ に対し m 階定数係

数微分作用素 L を

$$(6) \quad L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial_x^\alpha$$

とおく。但し $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$, $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$ で、係数 a_α は定数とする。このとき E が L の基本解であるとは、超関数 $(C_0^\infty(\mathbb{R}^d))'$ の意味で^{*28} $LE = \delta$ であることをいう。

もし基本解が見つければ、任意の $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対し $Lu = f$ の解 u は $u = E * f \in C^\infty$ で与えることができます。^{*29} なぜなら微分作用素は合成積中の関数ひとつに作用すればよいので次の等式が成立します:

$$L(E * f)(x) = (LE) * f(x) = \delta * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x - y) f(y) dy = f(x)$$

従って偏微分方程式を解くことが基本解を見つけることに帰着されたのですが、上の微分作用素を緩増加超関数と見たときには Fourier 変換が定義できて、

$$(7) \quad P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (2\pi i \xi)^\alpha$$

とおくと形式的に

$$LE = \delta \Leftrightarrow P(\xi) \hat{E}(\xi) = 1 \Leftrightarrow E(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{P} \right] (x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{P(\xi)} e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

となり、最後の積分が定義可能か?ということに帰着されます。これはここまで以上に専門的な内容を要する難しい内容です。端的に言えば、 $P(\xi) = 0$ なる点で被積分関数が定義できないことが困難点ですが、これについて以下の定理が知られています。

定理 4.7. L を (6) で定義されたものとする。対応する $P(\xi)$ の $|\alpha| = m$ の部分を抜き出した

$$(8) \quad P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha (2\pi i \xi)^\alpha$$

が原点以外の実数で 0 にならない ($P_m(\xi) = 0$ の実数解が $\xi = 0$ しかない) とき、ある超関数 E が存在し $LE = \delta$.

^{*28} ここまでは説明の簡便さのため Fourier 変換や超関数の定義を 1 次元に限定していましたが、実は多次元にほぼ同様の理屈で拡張することができることを断りなしに用いています

^{*29} 証明していませんが、実は $f \in C_0^\infty$, $E \in (C_0^\infty)'$ なら $E * f$ が定義可能で C^∞ であることが示せます

この定理の証明は遠大すぎてここで述べることはできませんがアイデアだけ書きます。 P は m 次多項式なので、ある $c > 0$ が存在し $|\xi|$ が十分大きければ $|P(\xi)| \geq c|\xi|^m$ となります。なので ξ が大きいところでは積分は超関数の意味で定義され、残った $|\xi|$ が大きくないところの積分が難しいところです。ここに P の零点がある場合「複素領域での積分」によって実軸上にある零点を避ける、という操作を行うことになるのですが、既に長い講義録に複素積分の理論を付け加えるのは大変なのでこれは省略します。このような複素数の微積分の基礎については 2 年生で習う、ということのみ述べておきます。

この章の最後に、変数係数ならどうするのかということについて 2 つの流派を述べます: ひとつは Hörmander 氏^{*30}による擬微分作用素^{*31}の理論、もう一つは佐藤や柏原^{*32}らによる佐藤超関数^{*33}や D 加群による代数解析の理論です。どちらを語るにしてももっとも沢山の準備があるためここではご紹介できませんが、(6) に現れるように「微分作用素に対応する関数の代数的構造を上手く捉える」ということが本質になります。擬微分作用素については [3] をご覧ください。代数解析に関しては筆者の専門ではないので、「代数解析」「 D 加群」をキーワードに本を探してみてください。

それから、途中で方程式の弱解というものを考えましたが、「偏微分方程式の微分できない解に現実的意味はあるのか？」という問いに次の衝撃波の動画をお見せします: このモデル方程式は次章で名前を挙げる Burgers 方程式や Euler 方程式です。

<https://youtu.be/u04FckCAZtU?si=3DdY0-UVGaJjBfu4>

英語ですが、「衝撃波とは何か」ということを前半で解説しています。その中に「急激な圧力の変化」がありますが、これは変化の起きる領域が狭すぎて不連続な変化と捉えるのが自然なものになっています。この衝撃波はある偏微分方程式の弱解になっています。

^{*30} 1962 年 Fields 賞受賞者

^{*31} 本当は代数解析でも擬微分作用素は出てくるのですが、こちらの流派と同じものなのか筆者はわかりません

^{*32} 2024 年 Abel 賞受賞者 (言わずもがな?)

^{*33} ここに至り日本語では Schwartz 超関数と佐藤超関数を区別する必要が出ましたが、英語では前者は distribution, 後者は hyperfunction と名づけられたため人の名前がなくても区別できます

5 結句 (現代的理論への案内)

公開講座の目的として、「高校生でも理解できるところから現代理論までご案内する」ということがあるのですが、正直に白状しますと前章までの内容ではまだ 1970 年代止まりで現代に至っていません。従って最後に現代の問題意識をさっと話して終わりとします。

最も基礎的な偏微分方程式は Laplace 方程式、熱方程式、波動方程式と呼ばれるもので、それぞれ $\Delta u = \sum_{j=1}^d u_{x_j x_j}$ として

$$\Delta u(x) = 0, \quad u_t(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, \quad u_{tt}(t, x) - \Delta u(t, x) = 0$$

という形なのでみな線型定数係数偏微分方程式です。これまでの理論は全てこのような線型偏微分方程式に適用可能なものでしたが、現実に見れる偏微分方程式の問題は線型なものだけとは限りません。むしろ、偏微分方程式論の応用範囲を現実の様々な問題に拡張していこうと思うと、必ず線型の枠内では足りなくなります。そのため、現代の偏微分方程式の研究者の多くの問題意識は

非線型偏微分方程式を解くにはどうしたらよいか

にあると思います。実際最も有名かつ重要な偏微分方程式の未解決問題はミレニアム問題にもなっている「Navier-Stokes 方程式^{*34}の解の存在と滑らかさ」ですが、特に非圧縮型の方程式は $(u, p) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ を未知関数^{*35}として

$$\begin{cases} u_t + (u, \nabla)u + \nabla p - \Delta u = 0, \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

(但し $\nabla p = (p_{x_1}, p_{x_2}, p_{x_3})$ と書け、2 次の非線形性 $(u, \nabla)u$ を含みます。方程式を全て書くと長すぎるので名前だけ挙げますが、有名な非線型偏微分方程式として

- Euler 方程式 (粘性のない流体のモデル方程式) $u_t + (u, \nabla)u + \nabla p = 0, \operatorname{div} u = 0$
- Burgers 方程式 (圧縮粘性流体の 1 次元モデル) $u_t + uu_x - u_{xx} = 0$
- Monge-Ampère 方程式 (微分幾何学に見れる方程式) $\det(\nabla^2 u) = f, f$ 既知
- Hamilton-Jacobi 方程式 (古典力学の再定式化の方程式)
- Korteweg-de Vries (KdV) 方程式 (浅水波のモデル) $u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0$

^{*34} 流体の運動を記述する基礎方程式

^{*35} 物理的には流体の流速と圧力

- … (他にもものすごくいっぱい)

などが挙げられます。あるいは、ある現象を数理モデル化した際に上記の 3 つの基本的な方程式のどれかに非線形項が加わったものが見つかる、というのもしばしばあります。また折角なので講演者の専門である、希薄な流体の運動を記述する基礎方程式である Boltzmann 方程式を書いておくと未知関数 $f = f(t, x, v)$ に関して

$$f_t + v \cdot \nabla_x f = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} B(v - v_*, \sigma) (f(v'_*) f(v') - f(v_*) f(v)) d\sigma dv_*$$

という形をしており、非線型積分偏微分方程式となります。

線型方程式では方程式を抽象的に扱い統一的な取り扱いができたのですが、非線型の問題ではその非線型性が物理・生物など現象の由来により様々で、問題により個別のアプローチ、特に「背後となる現象から考えて妥当な」非線型性の取り扱いが必要になり、そこが問題を難しく多様で面白いものにしています。

そのような非線型性の解析にこれまで培われた線型の理論が使われないかというとそうではなく、大抵の方程式の解析の第 1 ステップで行われることは線型性の抽出とその解析です。方程式の中にある線型項がどのような働きをするか、どう解析すればよいかということは多くの場合既に述べた理論が使えます。そしてそれ以外の非線型性の解析に、方程式ごと・問題ごとの解析 (と言っても大抵の場合いくつかの類型に帰着されますが) を行う、というのがよくある解析の流れです。

Fourier 解析は現在、偏微分方程式の解析において基礎的な道具のひとつとなっています。今回は紹介できなかった基礎理論は他にも数多くありますが、解析したい方程式の特性に応じて、研究者は最適な方法を選んで解析を行います。そのとき Fourier 解析は多くの場合に候補のひとつとなる道具です。偏微分方程式論に限らず、Fourier 解析の先にある問題を突き詰めた分野として現在調和解析と呼ばれる分野の研究は盛んであり、また道具としても確率論など他の解析学や、一部の幾何学や代数学にも用いられており、ここでは紹介できませんでしたがその適用範囲は非常に広大なものです。そのような意味で、Fourier 解析からわかることはこれからも単調増大に ∞ に向かうでしょう。皆さんが大学に進学して数学を専攻する場合、もしかしたらこの理論を学んで活用することがあるかもしれません。

最後に 1 点、講義録全体の議論の細部について注意しておきます: いくつか下線を引いて強調していますが、解析学において 2 つの極限を取るという操作は一般に交換可能ではありません。極限を用いて定義される微分や積分についても同様です。何らかの条件をチェックし、それが成立するから交換してよい、と議論を進めるべきです。それから収束

を議論するには「どういう意味で収束するのか」ということ (位相) を定めなくてはいけないのですが、これも曖昧にして書いていません。形式計算で議論全体の流れを見出すのは非常に有用な考え方ですが、現代数学では同時にその形式的計算を厳密な理論によって保証しなくてははいけません。これらは車軸の両輪です。大学数学はここが難しいかもしれませんが、将来学ぶ際には是非意識しておくの良いと思います。

参考文献

- [1] 岡本久、長岡亮介 『関数とは何か』 近代科学者 2014
- [2] 金子晃 『偏微分方程式入門』 基礎数学 12 東京大学出版会 1998
- [3] 熊ノ郷準 『擬微分作用素』 岩波書店 1974
- [4] スタイン、シャカルチ 著 新井、杉本、高^{*36}木、千原訳 『フーリエ解析入門』 プリンストン解析学講義 1 日本評論社 2007
- [5] — 『複素解析』 プリンストン解析学講義 2 日本評論社 2009
- [6] — 『実解析』 プリンストン解析学講義 3 日本評論社 2017
- [7] — 『関数解析』 プリンストン解析学講義 4 日本評論社 2024
- [8] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, and R. Danchin, ‘Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations,’ Springer 2011
- [9] L. Grafakos, ‘Classical Fourier Analysis’ 3rd ed., Springer 2014
- [10] L. Grafakos, ‘Modern Fourier Analysis’ 2nd ed., Springer 2009

上記の参考文献は講義録の性質を鑑み、和書を中心に選択しました。[1] は関数概念を中心とする近代解析学の発展の歴史に関して非常に詳しく書いており、ある程度大学で数学を学んだ人が「これらの概念はどういう動機で提唱され定着したのだろう」ということを知るのに勉強になります。本講義録では 2 章の内容の多く、特に歴史的な事柄について参照しました。

[4]–[7] は学部の解析学の内容を一通り学ぶのに勧められるテキストです。刊ごとのタイトルにある内容についてそれぞれが分野をなしている所以他にも良書は非常にたくさんあるのですが、本講義録のテーマである Fourier 解析に関わる内容が様々な事柄を学ぶにつれ何度も触れられ、Fourier 解析が解析学において如何に重要なテーマであるかということを一統的に学ぶのに非常に適しているためこれを選びました。本講義録の Fourier 解析に関わる事柄の多くは [4] を参考にしました。それぞれの刊で扱われる内容は高度ですが著者の説明は明快です。多分野への応用も多く載っており、特に整数論への応用に少なくないページが割かれています。

[2] は偏微分方程式の数学者向け入門の本です。現象論的に重要な様々な偏微分方程式を、その導出方法から基本的解法、さらに執筆時における線型偏微分方程式論の最先端の内容の概要まで非常に多彩なことが書いてあります。4 章の内容の一部に関して参照しま

^{*36} 正確にはいわゆる「はしごだか」

した。[3] は擬微分作用素の和書としてはほぼ唯一のもので、これを読みこなすにはいわゆる「現代的偏微分方程式論」(関数解析を用いた偏微分方程式の理論) の理解が必要になります。偏微分方程式を専門としても特に必要な人しか読まないかもしれない本ですが、擬微分作用素の話題を出したので挙げておきます。

最後に、Fourier 解析の現代的な内容である調和解析と、Fourier 解析とその発展的内容を用いた非線型偏微分方程式の現代的解析についてはほとんど述べることはできませんでした。その内容に対応する本として、洋書ですがそれぞれ [9]-[10], [8] を挙げます。^{*37*38}

^{*37} これらの本はライセンス契約により九大生はタダでダウンロードできます。九大生を目指すモチベーションにしましょう (?)

^{*38} ついでに述べますと、現代自然科学の勉強を高いレベルで志すにはどこかで必ず英語が必要になります。数学科に入学したい皆さんは、是非数学の次に沢山英語を勉強してください。