

2026年度

九州大学理学部数学科第3年次編入学 試験問題

注意事項

- (1) 試験開始の合図があるまで、問題冊子の中を見てはいけません。
- (2) 問題は4問あります。
- (3) 「解答はじめ」の合図があったら問題冊子を開き、不足等に気づいた場合は手をあげて監督者に知らせてください。
- (4) 試験開始後、各解答用紙に、受験番号、氏名を記入してください。
- (5) 解答用紙の表に書ききれない場合は、裏に続けて書いてください。それでも不足するときは、手をあげて監督者に申し出て追加の解答用紙を受取り、問題番号、受験番号、氏名を記入してください。
- (6) 試験終了後、解答用紙は、解答の記入のあるなしにかかわらず、すべて提出してください。問題冊子は持ち帰ってください。

九州大学理学部数学科

(1 枚白紙：計算用紙として利用できます)

[1] 次の問いに答えよ.

- (1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi\}$ 上で定義された関数

$$f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

の極値をすべて求めよ. また極値を与える点 (x, y) も求めよ.

- (2) $a > 0, b > 0$ とする. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で定義される楕円上に 3 点

$$A = (a \cos \alpha, b \sin \alpha), B = (a \cos \beta, b \sin \beta), C = (a \cos \gamma, b \sin \gamma)$$

をとる. ただし $0 \leq \alpha < \beta < \gamma < 2\pi$ とする. このとき, 三角形 ABC の面積の最大値と, 最大値をとるときに成り立つ α, β, γ の間の関係式を求めよ.

[2] $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底になることを示せ.

(2) a を実数とし, 線形写像 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$T(\mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, T(\mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, T(\mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

により定義する. このとき, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ をみたす 3 次正方行列 A を求めよ.

(3) (2) で求めた行列 A が正則行列によって対角化可能であるための a の条件を求めよ. また a がその条件をみたすとき, $P^{-1}AP$ が対角行列になるような 3 次正則行列 P を求めよ.

[3] $p(x) = c \prod_{i=1}^n (x - a_i)$ とする. ただし $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $n \geq 2$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) $\frac{p'(x)}{p(x)}$ を求めよ.

(2) $\log |p(x)|$ は各开区間 (a_i, a_{i+1}) ($i = 1, \dots, n-1$) で上に凸であることを示せ.

(3) 広義積分 $\int_{a_1}^{a_2} \log |p(x)| dx$ の値を求めよ.

[4] n 次正方行列 $M = (m_{ij})$ のトレースを $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{ii}$ と定める．また M^T は M の転置行列を表す． A, B は固有値がすべて 0 以上の n 次実対称行列とする．次の問いに答えよ．

- (1) n 次正方行列 $C = (c_{ij}), D = (d_{ij})$ に対し $\text{tr}(CD) = \text{tr}(DC)$ を示せ．
- (2) 任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対し $\boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v} \geq 0$ を示せ．さらに $A \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ であることは $\boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v} = 0$ であるための必要十分条件であることを示せ．
- (3) $\text{tr}(AB) \geq 0$ を示せ．

(1 枚白紙：計算用紙として利用できます)