九州大学大学院数理学府

平成 13 年度入学試験

数学共通科目問題 (数学コース)

注意

[1],[2], $\cdots$,[5] のすべてに解答しなさい。

[1]　次の不定積分および重積分を計算しなさい。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+4}\,dx$

(2) $\displaystyle\iiint_D z^2\ dxdydz$　　**ただし、**$D=\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leqq 2z\}$

[2]　次の問に答えなさい。

(1) $f(x)$ **を R 上の連続関数とし、さらに、積** $xf(x)$ **が有界関数であると仮定する。このとき、**$f(x)$ **は R 上一様連続であることを証明しなさい。**

(2) **R 上の関数** $f(x)$ **が一様連続ならば**

$$|f(x)| \leqq a|x| + b$$

が成り立つような正数 a, b **がとれることを証明しなさい。**

(3) $\mathbf{R}^2$ **上の** C^1**-級関数** $f(x,y)$ **の偏導関数** $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ **が共に有界関数であるとする。このとき、**$f(x,y)$ **は** $\mathbf{R}^2$ **上一様連続であることを証明しなさい。**

[3] $\mathbf{R}^3$ **の点の座標を** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **で表す。** $\mathbf{R}^3$ **内の平面**

$$\Pi: \ x + 2y + 3z = 0$$

に関して、つぎの問に答えなさい。

(1) **平面** Π **に直交する長さが** 1 **のベクトルを求めなさい。**

(2) $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ **と平面** Π **に関して対称な点** $F(\mathbf{a})$ **を求めなさい。さらに、** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **を平面** Π **に関して対称な点に写す変換** F **の (標準基底に関する) 表現行列を求めなさい。**

(3) (2) **で求めた行列を対角化する直交行列を求めなさい。**

[4] a **を定数とし、**

$$A = \begin{pmatrix} a & -3a & 3a \\ 3 & -7 & 6 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

とする。

(1) **行列** A **の固有値を求めなさい。**

(2) (1) **で求めた各固有値に対する固有ベクトルの空間を決定しなさい。**

(3) A **が正則行列で対角化可能となるような** a **の値を決定しなさい。またそのときの、**A **を対角化する正則行列とその逆行列を求めなさい。**

[5] **以下の** (1) **から** (4) **の真偽を判定しなさい。正しいときは証明を与え、正しくないときは反例をあげ、それが反例になることを説明しなさい。**

(1) n **次元空間** $\mathbf{R}^n$ **の** n **個のベクトル** $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_n$ **が** $\mathbf{R}^n$ **を生成するならば、**$\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_n$ **は一次独立である。**

(2) $n \times n$ **行列** $A = [a_{ij}]$ **のすべての** (i,j) **成分** a_{ij} $(i,j = 1,2,\cdots,n)$ **の余因子が** 0 **ならば、**$\dim \mathrm{Ker} A \geqq 2$ **である。**

(3) $\mathbf{R}$ **上の関数** $f(x)$ **が原点** 0 **で連続でないとする。このとき、ある** $\varepsilon > 0$ **と数列** $\{x_n\}_{n=1,2,\cdots}$ **が、**$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ **および** $|f(x_n) - f(0)| \geqq \varepsilon$ $(n = 1,2,\cdots)$ **をみたすように選べる。**

(4) **数列** $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ **が** 0 **に収束するならば、**$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} < \infty$ **である。**

九州大学大学院数理学府

平成 13 年度入学試験

数学選択科目問題 (数学コース)

注意

[1],[2], $\cdots$,[9] から 2 題を選択して、解答しなさい。

[1]　**自然数** $n = 1, 2, \cdots$ **と** $t > 0$ **に対して、関数列** $G_n(t)$ **を**

$$G_n(t) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{t-1} dx$$

と定義する。以下の問に答えなさい。

(1)

$$G_n(t) = n^t \int_0^1 (1-y)^n y^{t-1} dy$$

が成り立つことを示しなさい。

(2)　**漸化式**

$$G_n(t) = \frac{n^{t+1}}{t(n-1)^{t+1}}\, G_{n-1}(t+1) \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

を証明しなさい。

(3)　$n = 1, 2, \cdots$ に対して、

$$G_n(t) = \frac{n^t\ n!}{t(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}$$

であることを証明しなさい。

(4)　$n \to \infty$ のときに $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ が e^{-x} に広義一様収束することを用いて、

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n^t\ n!}{t(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}$$

を証明しなさい。

[**2**]

(1)　2×2 複素行列 A のべき乗 A^n の (i,j) 成分 $(i, j = 1, 2)$ を $a_{ij}^{(n)}$ と表すことにする。(ただし、A^0 は単位行列とする。) 行列 $A_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n$ の各成分 $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} a_{ij}^{(n)}$ が極限 $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} a_{ij}^{(n)}$ をもつことを次の手順にしたがって証明しなさい。その極限を (i,j) 成分とする 2×2 行列を以下 $\exp A$ と書くことにする。

(i)　行列 A を上三角行列とする。$N \to \infty$ のとき A_N の各対角成分は収束することを示しなさい。

(ii)　行列 A を上三角行列とし、A の各成分の絶対値の最大値を M とする。A_N の $(1,2)$ 成分を M を用いて評価し、$N \to \infty$ のとき絶対収束することを示しなさい。

(iii)　G を正則行列とする。もし、行列 A が極限 $\exp A$ をもつならば、GAG^{-1} も極限 $\exp(GAG^{-1})$ をもち、$\exp(GAG^{-1}) = G(\exp A)G^{-1}$ が成立することを示しなさい。

(iv)　任意の 2×2 複素行列 A は極限 $\exp A$ をもつことを証明しなさい。

(2)　$A = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}$ (θ は実数) のとき、$\exp A$ が具体的にどのような行列かを計算しなさい。

(3)　$\det(\exp A) = e^{\mathrm{tr}A}$ を示しなさい。ただし、$\mathrm{tr}A$ は A の二つの対角成分の和とする。

(4)　P を 2×2 直交行列とする。このとき、$P = \exp A$ となる実行列 A がとれるための必要十分条件は $\det P = 1$ であることを示しなさい。

[3]

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -4 & 28 \\ 2 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

とする。

(1)　行列 A のジョルダン標準形 $J = P^{-1}AP$ と変換行列 P を求めなさい。

(2)　A^n (n は正の整数) を求めなさい。

[4]　$f(z)$ を $|z| < R$ で正則な関数とし、またその原点を中心とするテイラー展開を $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ とする。

(1)　円 $S_r = \{z = re^{i\theta};\ 0 \leqq \theta < 2\pi\}$ $(0 < r < R)$ 上での $|f(z)|^2$ の平均値は $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2\ r^{2n}$ であること、つまり

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\ d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2\ r^{2n}$$

が成立することを示しなさい。

(2)　$|z| < R$ の各点で $|f(z)| \leqq M$ とすると、$|c_n| \leqq \dfrac{M}{R^n}$ が各 n に対して成立することを示しなさい。またある n に対して等号が成立するならば、$f(z) \equiv \dfrac{M}{R^n}\ z_0 z^n$ $(|z_0| = 1)$ であることを示しなさい。

(3)　$f(z)$ が全平面で正則かつ有界であれば $f(z)$ は定数であることを示しなさい。

[5]

(1) a, b を有限群 G の二元とする。

(i) ab の位数と ba の位数は等しいことを証明しなさい。

(ii) m, n を互いに素な自然数とし、a, b の位数がそれぞれ m, n であるとする。$ab = ba$ のとき ab の位数は mn であることを証明しなさい。

(2) 位数 6 以下の群をすべて決定しなさい。ただし、互いに同型な群は等しいものとみなす。

(3) (2) で決定した群のうち、非アーベルな群の自己同型群を求めなさい。

[6] R を零元および零元と異なる単位元を含む可換環とする。R のイデアル I に対し

$$\sqrt{I} = \{x \in R;\ \text{ある自然数 } m \text{ に対し } x^m \in I\}$$

は I の根基と呼ばれる。

(1) 以下を示しなさい。

(i) $\sqrt{I}$ は I を含む R のイデアルである。

(ii) J を R のイデアルとするとき、$\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ である。

(iii) P を R の素イデアルとするとき、$\sqrt{P} = P$ である。

(2) 有理整数環 $\mathbf{Z}$ の単項イデアル $72\,\mathbf{Z}$ に対し、その根基の生成元を求めなさい。

(3) 可換体 k 上 2 変数多項式環 $k[x, y]$ において、x^2, xy, y^m（m は自然数) で生成されるイデアル (x^2, xy, y^m) を K とおく。このとき、K の根基の生成元を一組求めなさい。

[7] dx を $\mathbf{R}$ 上のルベーグ測度とし、各 $n = 1, 2, \cdots$ に対して $\mathbf{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(n^2x^2 + 1)}$$

と定義する。

(1)　各 $n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\int_{\mathbf{R}} f_n(x)dx$$

の値を計算しなさい。

(2)　$\mathbf{R}$ 上の有界な可測関数 $g(x)$ が原点 $x = 0$ で連続であるとする。このとき、

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x)g(x)dx = g(0)$$

を証明しなさい。

(3)　$g(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の有界な可測関数とする。さらに原点において左側および右側極限をもつものとし、$\lim_{x\to 0^-} g(x) = a$, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = b$ とする。このとき、

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x)g(x)dx$$

の値を求めなさい。

[8]　座標平面の、原点を含む領域 D から 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ への可微分写像

$$f\colon D \ni (u, v) \longmapsto f(u, v) \in \mathbf{R}^3$$

が曲面を与えている、すなわち、$\frac{\partial f}{\partial u}$ と $\frac{\partial f}{\partial v}$ が各 $(u, v) \in D$ で線型独立であるとする。さらに、次が成り立つものとする。

1. $f(0, 0) = (0, 0, 0)$
2. f の単位法線ベクトル場を $\mathbf{n}$ とするとき、$\mathbf{n}(0, 0) = (0, 0, 1)$
3. f の第 2 基本量を L, M, N とするとき、行列

$$\begin{bmatrix} L(0,0) & M(0,0) \\ M(0,0) & N(0,0) \end{bmatrix}$$

　が正定値である。

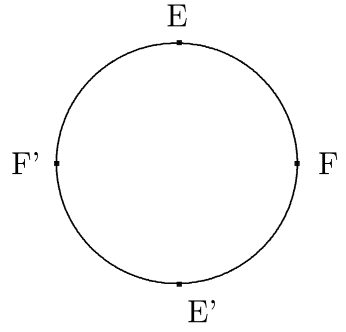
このとき、D における原点の近傍 U で、

$$f(U \setminus \{0\}) \subset \{(x,y,z) \mid z > 0\}$$

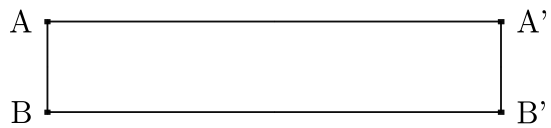
となるものが存在することを証明しなさい。
ヒント：$F(u,v) = \langle f(u,v), \mathbf{n}(0,0) \rangle$ で与えられる関数の $(u,v) = (0,0)$ の近傍での挙動を調べなさい。ただし、$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbf{R}^3$ の標準的な内積である。

[9]　以下に与えた図形 L, M, N について問に答えなさい。

図形 L :　下図のような円盤。



図形 M :　下図のリボンの両端 AB と B'A' を図示されている向きを合わせるようにはりつけて得られる図形。



図形 N :　図形 L の境界をなす円周 EFE'F'E を M の境界に、順に弧 EFE' を AA' に弧 E'F'E を BB' に各々はりつけることで、図形 L を図形 M にはりつけて得られる図形。

(1)　L の整数係数ホモロジー群を計算しなさい。

(2)　M の整数係数ホモロジー群を計算しなさい。

(3)　N の整数係数ホモロジー群を計算しなさい。