

九州大学大学院数理学府  
平成 14 年度修士課程入学試験  
数学共通科目問題 (数学コース)

注意 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答しなさい。

[1] 次の各問に答えなさい。

- (1) 極座標表示された閉曲線  $r = 1 + \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) が囲む領域の面積と曲線の全長を求めなさい。
- (2) 次の 3 重積分を計算しなさい。

$$V = \iiint_D xyz \, dx dy dz$$

ただし,

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, x, y, z \geq 0 \right\}$$

であり,  $a, b, c > 0$  は定数とする。

[2]  $a$  を実数とし, 次の各問に答えなさい。

- (1) 4次元実ベクトル空間  $\mathbf{R}^4$  内の 4 個の列ベクトルの組

$$\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$$

が一次従属となるような  $a$  の値をすべて求めなさい。

- (2) 行列  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 2 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$  の階数を調べなさい。

- (3) 一般に  $n$  次実正方行列  $B$  がある自然数  $k$  に対して  $B^k = O$  を満たすとき,  $0$  でない任意の実数  $t$  に対して  $B - tI_n$  の逆行列が存在することを示しなさい。

ただし,  $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$  は  $n$  次単位行列とする。

- (4) 問 (2) で定めた行列  $A(a)$  は, 任意の実数  $a$  と任意の自然数  $k$  に対して  $A(a)^k \neq O$  となることを示しなさい.

[3]  $A$  を  $n$  次実対称行列とする. 零ベクトルでない任意の  $n$  次元実列ベクトル  $x$  に対して  ${}^t x A x > 0$  が成り立つとき,  $A$  を正定値と定義する. ただし,  ${}^t x$  はベクトル  $x$  の転置を表わす. このとき, 次の各問に答えなさい.

- (1)  $n$  次実対称行列  $A$  に対して, 次の 3 条件は互いに同値であることを示しなさい.

- (a)  $A$  は正定値.  
 (b)  $A$  のすべての固有値は正.  
 (c) ある正則行列  $B$  があって  $A = {}^t B B$  となる. ただし,  ${}^t B$  は行列  $B$  の転置を表わす.

- (2) 3 次実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -3 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

に対して,

- (i)  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めなさい.  
 (ii)  $A$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  とするとき

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} {}^t T$$

となる直交行列  $T$  を求めなさい.

- (iii)  $A = S {}^t S$  となる 3 次正方行列  $S$  をひとつ求めなさい.

[4]  $\mathbf{R}^2$  上の  $C^2$  級関数  $f(x, y)$  が次の 2 条件 (i)(ii) を満たすとする.

- (i) 円板  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  上で, 対称行列

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

は正定値である.

(ii)  $D$  の境界  $\partial D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  上で  $f(x, y) = 0$  が成り立つ.

このとき, 次の各問に答えなさい.

(1)  $f(x, y)$  を  $D$  上の点  $(a, b)$  のまわりで 2 次の項が剰余項になるようにテイラー展開しなさい.

(2)  $D$  上の点  $(a, b)$  で

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

が成り立つとする. このとき  $f(a, b)$  は  $D$  における  $f$  の最小値であることを証明しなさい.

(3)  $f(x, y)$  は  $D$  上で最大値をとらないことを証明しなさい.

(4)  $\partial D$  上の任意の点  $(x, y)$  に対して,

$$\frac{\partial f}{\partial r}(x, y) > 0$$

を示しなさい. ただし,  $r$  は  $(x, y)$  を極座標表示したときの動径成分とする.

[5] 以下の (1) から (3) の真偽を判定しなさい. 正しいときは証明を与え, 正しくないときは反例または反証を与えなさい.

(1) 次の広義重積分の値は有限である.

$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^2}$$

ただし,  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$  とする.

(2) 非負数列  $a_n \geq 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 0$$

を満たすならば,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  である.

(3) 整数を成分とする行列を整数行列と呼ぶ. 正則な整数行列  $A$  の逆行列が整数行列となるための必要十分条件は,  $A$  の行列式が 1 または  $-1$  に等しいことである.

九州大学大学院数理学府  
平成 14 年度修士課程入学試験  
数学選択科目問題 (数学コース)

注意 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9] の中から 2 題を選択して, 解答しなさい.

[1]  $n$  を整数とする. 整数係数一変数多項式環  $Z[x]$  において,  $x^2 + 1$  と  $n$  で生成されるイデアルを  $I_n$  とおき,  $R_n = Z[x]/I_n$  とおく. このとき, 次の各問に答えなさい.

(1)  $R_0$  は次の環と同型であることを示しなさい.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{Z} \right\}$$

(2)  $R_2$  は何個の元からなるか.

(3)  $R_3$  は体であることを示しなさい.

(4)  $R_5$  の極大イデアルをすべてあげなさい.

[2] 5 次の交代群  $A_5$  が集合  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  に左から作用しているとする (すなわち  $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$  などと定める).  $A_5$  の中で二元  $\sigma = (12)(34)$  と  $\tau = (12345)$  とにより生成される部分群  $G$  を考える. このとき, 次の各問に答えなさい.

(1)  $A_5$  における位数 2 の元の個数, 位数 3 の元の個数, 位数 5 の元の個数, をそれぞれ求めなさい.

(2)  $\tau\sigma, \tau^2\sigma$  および  $[\sigma, \tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$  をそれぞれ巡回置換の積で表わしなさい. さらに  $\rho = (123)$  とするとき,  $[\rho, \sigma] = \rho\sigma\rho^{-1}\sigma^{-1}$  を巡回置換の積で表わしなさい.

(3)  $\sigma = [x, y], \tau = [u, v]$  となる  $x, y, u, v \in A_5$  を見出しなさい.

(4)  $G = A_5$  であることを証明しなさい.

(5)  $C^\times$  を 0 でない複素数全体のなす乗法群とする.  $f: A_5 \rightarrow C^\times$  が準同型写像であるとき,  $f$  による  $A_5$  の像  $f(A_5)$  は  $\{1\}$  になることを示しなさい.

[3] 3次元ユークリッド空間  $R^3$  内の  $C^\infty$  級曲線  $f(s)$  ( $0 < s < 1$ ) で, その接ベクトル  $f_1 = \frac{df}{ds}$  の大きさが 1 であるものを考える. ただし, ベクトルは  $R^3$  内の列ベクトルとみなすことにする. このとき, 次の各問に答えなさい.

- (1) 曲線  $f(s)$  の接ベクトル  $f_1$  を  $s$  で微分することによって得られるベクトル  $f'_1$  が決して零ベクトルにはならないとする. このとき, 曲線  $f(s)$  の主法線ベクトル  $f_2$ , 曲率  $k(s)$ , 従法線ベクトル  $f_3$ , 捩率  $t(s)$  の定義を記述しなさい. また, ベクトル  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を  $s$  で微分することにより得られるベクトルを  $f'_i$  と表わし,  $(f_1, f_2, f_3), (f'_1, f'_2, f'_3)$  を 3 次正方行列とみなす. このとき,

$$(f'_1, f'_2, f'_3) = (f_1, f_2, f_3) K(s)$$

が成立するような 3 次正方行列  $K(s)$  を  $k(s)$  と  $t(s)$  を用いて表わしなさい.

- (2) 接ベクトル  $g_1 = \frac{dg}{ds}$  の大きさが 1 である別の曲線  $g(s)$  を考える. 問 (1) と同様の仮定の下で, その主法線ベクトルを  $g_2$ , 従法線ベクトルを  $g_3$  と表わし, 3 次正方行列  $L(s)$  を等式

$$(g'_1, g'_2, g'_3) = (g_1, g_2, g_3) L(s)$$

によって定義する. また, 3 次正方行列  $A(s)$  を等式

$$(g_1, g_2, g_3) = (f_1, f_2, f_3) A(s)$$

によって定義する. このとき,  $A(s)$  は方程式

$$\frac{dA}{ds} = A L - K A$$

を満足することを示しなさい.

- (3) 二曲線  $f(s), g(s)$  の曲率, 捩率が一致し, かつある  $s_0 \in (0, 1)$  に対して  $A(s_0)$  が単位行列であるとする. このとき, 問 (2) で定義された行列値関数  $A(s)$  は恒等的に単位行列であることを示しなさい.

[4] 通常位相を持つ  $R^2$  に同値関係  $\sim$  を

$$(x, y) \sim (x', y') \iff (x - x', y - y') \in Z^2 (\subset R^2)$$

で定義し, その商空間  $R^2 / \sim$  を  $X$ , その商写像  $R^2 \rightarrow X$  を  $\pi$  とおく. このとき, 次の各問に答えなさい.

- (1)  $X$  はコンパクトハウスドルフ空間であることを示しなさい.

- (2)  $\mathbf{R}^2$  上の  $y$ -軸の商写像  $\pi$  による像を  $C_1$ , 直線  $y = x$  の商写像  $\pi$  による像を  $C_2$  とする. このとき,  $X - C_1$  と  $X - C_2$  が位相同型かどうかを判定し, その理由も示しなさい.
- (3) 閉曲面  $X$  の整数係数ホモロジー群を求めなさい.
- (4)  $X$  とそのコピーの計二個を  $C_1$  で張り合わせて図形  $Y$  を作る. このとき, 図形  $Y$  の整数係数ホモロジー群を求めなさい.

[5]  $(m, n)$  を  $0 \leq m < n$  なる整数の組とする. 以下の各問に答えなさい.

- (1) 次の有理関数  $f(z)$  の複素平面  $C$  における極の位置, 位数, 留数を求めなさい.

$$f(z) = \frac{z^{2m}}{1 + z^{2n}}$$

- (2) 上半平面  $\text{Im } z > 0$  における  $f(z)$  の留数の和を  $\sin$  を用いて表わしなさい.
- (3) 次の実広義積分  $I(m, n)$  の値を求めなさい.

$$I(m, n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} dx$$

[6] 実数  $\mathbf{R}$  上可測な実数値関数列  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  がほとんど至るところで関数  $f(x)$  に収束するとする. さらに, ある正の定数  $K$  があり, すべての自然数  $n$  に対して,

$$\int_{\mathbf{R}} |f_n(x)|^2 dx \leq K$$

が成立するとする. このとき, 次の各問に答えなさい.

- (1)  $\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 dx \leq K$  を示しなさい.
- (2) 各自然数  $n$  と各正数  $\varepsilon > 0$  に対して集合  $E_n(\varepsilon)$  を

$$E_n(\varepsilon) = \{x \in \mathbf{R} : \varepsilon |f_n(x) - f(x)| < |f(x)|\}$$

によって定める. このとき, 次の不等式を示しなさい.

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)(f_n(x) - f(x))| dx \leq 4K\varepsilon + \int_{E_n(\varepsilon)} |f(x)(f_n(x) - f(x))| dx.$$

- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n(\varepsilon)} |f(x)(f_n(x) - f(x))| dx = 0$  を示しなさい.

- (4) この問題の仮定のもとで、以下の 2 条件 (a), (b) が同値であることを証明しなさい。

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} |f_n(x)|^2 dx = \int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 dx$$

[7] 次の各問に答えなさい。

- (1)  $a(t)$  を区間  $(0, T)$  上の非負値連続関数とする。実数値関数に対する微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = a(t)x(t), & 0 < s < t < T, \\ x(s) = x_0 \end{cases}$$

の  $t \geq s$  における解  $x(t)$  を  $x_0$  と  $a(t)$  を用いて表わしなさい。

- (2)  $a(t)$  を問 (1) と同じ条件を満たす関数とする。微分不等式

$$\frac{dw}{dt}(t) \leq a(t)w(t), \quad w(t) \geq 0$$

を満たす  $w(t)$  が次の不等式を満たすことを示しなさい。

$$w(t) \leq w(s) \exp\left(\int_s^t a(r) dr\right), \quad 0 < s < t < T.$$

- (3)  $f(t, x)$  は  $[0, T] \times \mathbf{R}$  上の実数値連続関数で次の不等式を満たすとする。

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \frac{|x - y|}{t}$$

さて、 $x_1(t)$  と  $x_2(t)$  が微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)), & 0 < t < T, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{E})$$

の解であるとき、 $w(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$  とおく。  $w(t)^2 = (x_1(t) - x_2(t))^2$  の満たす微分方程式を求めて、 $w(t)$  が次の不等式を満たすことを示しなさい。

$$\frac{w(t)}{t} \leq \frac{w(s)}{s}, \quad 0 < s < t < T$$

(4) 上の微分方程式 (E) の解が一意的であることを示しなさい。

[8]  $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  を閉区間  $0 \leq x \leq 1$  上で定義された連続関数の列,  $h(x)$  を閉区間  $0 \leq x \leq 1$  上の連続関数とし, これらは次の条件 (i) (ii) (iii) を満たすものとする。

(i)  $h(x)$  は狭義の単調増加関数であり,  $h(0) \geq 0$ ,

(ii) 任意の自然数  $n$  と任意の  $x \in [0, 1]$  に対して  $0 \leq h(x)g_n(x) \leq 1$ ,

(iii) 任意の自然数  $n$  に対して  $\int_0^1 g_n(x) dx = n$ .

このとき, 次の各問に答えなさい。

(1)  $f(x)$  を  $R$  上で定義された有界かつ一様連続な実数値関数とする。また, 各自然数  $n$  に対して,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \int_0^1 f(x+t) g_n(t) dt$$

とおく。このとき, 関数列  $F_n(x)$  は  $n \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  に一様収束することを示しなさい。

(2) 条件 (i) (ii) (iii) を満たす  $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  と  $h(x)$  の具体例を 1 組与え, それらが実際に 3 条件を満足することを示しなさい。

[9]  $A$  を  $n$  次複素正方行列,  $v_1, \dots, v_r$  を  $A$  の (すべてとは限らない) 相異なる固有値に対応する固有ベクトルとする。このとき, 次の各問に答えなさい。

(1)  $v = v_1 + \dots + v_r$  とおく。このとき,  $v, Av, \dots, A^{r-1}v$  は一次独立であることを示しなさい。

(2) 問 (1) のベクトル  $v$  に対して,  $k \geq r$  ならば  $v, Av, \dots, A^k v$  は一次従属であることを示しなさい。

(3)  $A$  は対角化可能であるとする。ベクトル  $w$  が存在して,  $w, Aw, \dots, A^k w, \dots$  が  $C^n$  を生成するための必要十分条件は,  $A$  の固有値がすべて相異なることであることを示しなさい。