九州大学大学院数理学府
平成16年度修士課程入学試験
数学共通科目問題 (数学コース)

注意 • 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答せよ.

• 以下 $\mathbf{N}$ は自然数の全体, $\mathbf{R}$ は実数の全体を表す.

[1] x_1, x_2, x_3, x_4 を 0 ではない実数, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$ とし, 4×4 行列 B, C を

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & x_4^2 \end{pmatrix}$$

と定義する. さらに $A = B + C$ とする.

(1) $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^4$, $\mathbf{u} \neq 0$, が A の固有値 λ に対応する固有ベクトルであるためには,

$$(B - \lambda I)\mathbf{u} = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{x}$$

が成り立つことが必要十分であることを示せ. ただし, I は4次単位行列, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbf{R}^4$ の通常の内積である.

(2) 1 は A の固有値となることを証明し, さらに固有値 1 に対応する固有空間の次元を求めよ.

(3) 2 は A の固有値とはならないことを証明せよ.

(4) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ のとき, A の 1 以外の固有値を求めよ.

[2] 実数を成分とする 2×2 行列全体のなす実ベクトル空間を M で表す. $A \in M$ に対し, 写像 $T_A : M \to M$ を $T_A(X) = AX - XA$ で定義する.

(1) T_A は線型写像であることを示せ. また, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき, M の適当な基底に関し T_A を行列表示せよ.

(2) A がスカラー行列でないとき, T_A の像 $T_A(M)$ の実ベクトル空間としての次元を求めよ. ここで, スカラー行列とは $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$, の形の行列をいう.

[3]

(1) 単調減少な正数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が 0 に収束するならば，級数

$$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots$$

は収束することを証明せよ.

(2) 等式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

の両辺を 0 から 1 まで積分することにより，級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

の値 α を求めよ.

(3) 数列 $\{(-1)^{n-1}/n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を並べ替えて別の数列 $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を作り，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が (2) で求めた値 α とは異なる値に収束するようにせよ.

[4] 区間 (a,b) 上の C^∞ 級関数 f が (a,b) 上 $f''(x) \geq 0$ をみたしているとする.

(1) $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c) \quad (x, c \in (a,b))$ が成り立つことを示せ.

(2) 集合 $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > f(x),\, x \in (a,b)\}$ が凸集合であること（すなわち，D の任意の 2 点を結ぶ線分は D に含まれること）を示せ.

(3) $c \in (a,b)$ について，$f^{(k)}(c) = 0 \ (2 \leq k \leq m-1)$ かつ $f^{(m)}(c) \neq 0$ となるとき，m は偶数であること，および $f^{(m)}(c) > 0$ となることを示せ．ただし，$f^{(k)}$ は，f の k 階導関数とする.

[5]

(1) $\mathbf{R}$ 上の連続関数 f に対し，関数 $f_1(x),\, f_2(x), \ldots$ を

$$f_1(x) = \int_0^x f(y)\,dy, \quad f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(y)\,dy \quad (k \geq 2),$$

で定義する.

(i)

$$f_2(x) = \int_0^x f(y)(x-y)\,dy$$

となることを示せ.

(ii)

$$f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x f(y)(x-y)^{k-1}\,dy \quad (k \geq 2)$$

となることを示せ.

(2) $g_0(x) = e^{-\lambda x}$ $(\lambda > 0)$, とする. C^∞ 級関数 $g_1(x), g_2(x), \ldots$ が

$$g_k'(x) = -\lambda g_k(x) + g_{k-1}(x), \quad g_k(0) = 0, \quad (k \geq 1)$$

をみたすとする.

(i) $g_1(x)$ を求めよ.

(ii) $g_k(x)$ $(k \geq 1)$ を求めよ.

九州大学大学院数理学府
平成16年度修士課程入学試験
数学共通科目問題 (数理科学コース)

注意
- 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答せよ.
- 以下 $\mathbf{N}$ は自然数の全体，$\mathbf{R}$ は実数の全体を表す.

[1] x_1, x_2, x_3, x_4 を 0 ではない実数，$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$ とし，4×4 行列 B, C を

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & x_4^2 \end{pmatrix}$$

と定義する．さらに $A = B + C$ とする.

(1) $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^4$, $\mathbf{u} \neq 0$, が A の固有値 λ に対応する固有ベクトルであるためには,

$$(B - \lambda I)\mathbf{u} = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{x}$$

が成り立つことが必要十分であることを示せ．ただし，I は 4 次単位行列, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbf{R}^4$ の通常の内積である.

(2) 1 は A の固有値となることを証明し，さらに固有値 1 に対応する固有空間の次元を求めよ.

(3) 2 は A の固有値とはならないことを証明せよ.

(4) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ のとき，A の 1 以外の固有値を求めよ.

[2] 実数 p, q, r に対し

$$C^{(p,q,r)} = \begin{pmatrix} p & q & r \\ r & p & q \\ q & r & p \end{pmatrix}$$

とおく．この形の行列を巡回行列と呼ぶ． 実 3 次正方行列 A について以下の問に答えよ.

(1) A が巡回行列となるためには

$$C^{(0,1,0)}A = AC^{(0,1,0)}$$

が成り立つことが必要十分であること示せ.

(2) A は正則であるとする．A が巡回行列となるためには A^{-1} が巡回行列となることが必要十分であることを示せ.

(3) $A = C^{(p,q,r)}$ が正則であるとき，$A^{-1} = C^{(s,t,u)}$ と表せば，$(p+q+r)(s+t+u) = 1$ が成り立つことを示せ.

[3]

(1) 単調減少な正数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が 0 に収束するならば， 級数

$$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots$$

は収束することを証明せよ.

(2) (i)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0$$

を示せ.

(ii) 等式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

の両辺を 0 から 1 まで積分することにより， 級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

の値を求めよ.

[4]

(1) 関数 $f(x)$ は $[0,\infty)$ 上連続で，$\lambda > 1$ が存在して $\sup\{x^\lambda|f(x)| : x \geq 0\} < \infty$ が成り立つとする．このとき広義積分

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

が存在することを示せ.

(2) 自然数 n に対し，広義積分

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

が存在することを示せ.

(3) 自然数 n に対し，$\Gamma(n) = (n-1)!$ となることを示せ.

[5]

(1) $\mathbf{R}$ 上の連続関数 f に対し，関数 $f_1(x),\ f_2(x),\ldots$ を

$$f_1(x) = \int_0^x f(y)\,dy, \quad f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(y)\,dy \quad (k \geq 2),$$

で定義する.

(i)

$$f_2(x) = \int_0^x f(y)(x-y)\,dy$$

となることを示せ.

(ii)

$$f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x f(y)(x-y)^{k-1}\,dy \quad (k \geq 2)$$

となることを示せ.

(2) $g_0(x) = e^{-\lambda x}$ $(\lambda > 0)$, とする．C^∞ 級関数 $g_1(x), g_2(x), \ldots$ が

$$g_k'(x) = -\lambda g_k(x) + g_{k-1}(x), \quad g_k(0) = 0, \quad (k \geq 1)$$

をみたすとする.

(i) $g_1(x)$ を求めよ.

(ii) $g_k(x)$ $(k \geq 1)$ を求めよ.

九州大学大学院数理学府
平成16年度修士課程入学試験
数学選択科目問題 (数学コース)

注意 • 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9] の中から 2 題を選択して解答せよ.

• 以下 $\mathbf{N}$ は自然数の全体, $\mathbf{Z}$ は整数の全体, $\mathbf{R}$ は実数の全体, $\mathbf{C}$ は複素数の全体を表す.

[1] C^∞ 級関数 $z = f(x, y)$ を

$$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq r^2\right\}, \quad r > 0$$

なる範囲において考察する.

(1) 曲線 $C : x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ (0 \leq t \leq 2\pi)$ 上の線積分について, 次の不等式を示せ.

$$\oint_C \left\{ -\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} dx + \frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} dy \right\} \leq 2\pi r$$

(2) $z = f(x, y)$ のグラフの平均曲率 H は

$$H = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) \right\}$$

であることを示せ.

(3) 正の実数 $a > 0$ に対して, $H \geq a$ が成立しているならば,

$$r \leq \frac{1}{a}$$

でなければならないことを示せ.

[2]

(1) $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ を $\mathbf{R}^3$ の一次独立なベクトルとするとき,

$$p(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi)\mathbf{u} + (\sin\theta\sin\phi)\mathbf{v} + (\cos\theta)\mathbf{w}$$

で与えられる図形は楕円面であること示せ. ただし, 楕円面とは, ある直交座標系で

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (*)$$

と表される曲面のことを言う.

この問に答えられなくても, 以下の問を考えよ.

(2) 楕円面 $(*)$ のガウス曲率を K とするとき，いたるところ $K>0$ であることを示せ.

(3) 楕円面のオイラー数と，いたるところ $K>0$ であることの関係を述べよ.

[3]

(1) $f: X \longrightarrow Y$ をコンパクト空間 X から位相空間 Y への連続写像とする. $f(X)$ はコンパクト集合となることを証明せよ.

(2) $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ の部分空間

$$S^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

を考える.

(i) S^n はハウスドルフ空間であることを示せ.

(ii) S^n は弧状連結であることを示せ.

(iii) S^n に同値関係 $\sim$ を次のように定める.

$$\begin{aligned}&(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \sim (y_1, y_2, \cdots, y_{n+1})\\ \Longleftrightarrow\ &\exists \lambda \in \mathbf{R};\quad (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = \lambda(y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}).\end{aligned}$$

この同値関係による商空間 $RP^n = S^n/\sim$ はコンパクト空間であることを示せ.

(iv) $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ に同値関係 $\sim'$ を次のように定める.

$$\begin{aligned}&(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \sim' (y_1, y_2, \cdots, y_{n+1})\\ \Longleftrightarrow\ &\exists \lambda \in \mathbf{R};\quad (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = \lambda(y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}).\end{aligned}$$

この同値関係による商空間 $P(\mathbf{R}^{n+1})$ は RP^n と同相であることを示せ.

[4] D を閉円板 $\{z \in \mathbf{C} : |z| \le R\}$, $(R>0)$ を含む複素平面上の領域とし，$f(z)$ を D で正則な関数とする．またその実部で定義される実数値関数を $u(z) = \mathrm{Re}\, f(z)$, $(z \in D)$ とする．

(1) $R > |z| > 0$ を満たす複素数 z に対して，$w = \dfrac{R^2}{|z|^2} z$ とおく．$C = \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta| = R\}$ に原点を中心として反時計回りの向きを与えるとき、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \Big(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \Big) d\zeta$$

が成り立つことを示せ.

(2) z の極形式を $z = r\,e^{i\theta}$, $(R > r \geq 0)$ とするとき

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi})\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\phi - \theta) + r^2}\,d\phi$$

が成り立つことを示せ.

(3) 領域 D の点 z_0 に対して，$\rho > 0$ を $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| \leq \rho\} \subset D$ をみたすようにとるとき

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\phi})\,d\phi$$

が成り立つことを示せ.

(4) $u(z)$ が D の内点で最大値を取れば、$u(z)$ および $f(z)$ は D で定数関数となることを示せ.

[5] $[0,1]$ で定義された複素数値連続関数 u, v に対し

$$(u, v) := \int_0^1 u(x)\overline{v(x)}\,dx$$

と定める.

また，$[0,1]$ で定義された複素数値 C^2 級関数 u に対し

$$L[u](x) := \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}(x)\right) + b(x)u(x)$$

によって $[0,1]$ 上の連続関数 $L[u](x)$ を定義する．但し，$a(x)$ は $[0,1]$ で定義された正値な実数値 C^3 級関数で，$b(x)$ は $[0,1]$ で定義された実数値 C^2 級関数であるとする.

$[0,1]$ で定義された複素数値連続関数 u で $u(0) = u(1) = 0$ を満たすものの集合を $C_0(0,1)$ と書くことにする.

以上の記号の下で複素数 λ をパラメタとする次の常微分方程式の境界値問題を考える:

$$\begin{cases} L[u] = \lambda u \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \qquad (\sharp)$$

(1) $u, v \in C_0(0,1)$ が C^2 級のとき

$$(L[u], v) = (u, L[v])$$

が成り立つことを示せ.

(2) ある λ に対し境界値問題 $(\sharp)$ が非自明な解 ($u \equiv 0$ でない解) を持つならば, λ は実数であることを示せ.

(3) u_1 を $\lambda = \lambda_1$ に対する ($\sharp$) の解とし，u_2 を $\lambda = \lambda_2$ に対する ($\sharp$) の解とするとき，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ であるならば

$$(u_1, u_2) = 0$$

となることを示せ．

(4) $u \in C_0(0,1)$ は C^4 級であるとする．実数 λ に対して $v = L[u] - \lambda u$ とおくとき，v がこの λ に対し ($\sharp$) をみたすならば $v \equiv 0$ であることを示せ．

(5) λ が正で十分大きければ ($\sharp$) は非自明な解を持たないことを示せ．

[6] $f_n \in L^1([0,1])$ $(n \in \mathbf{N})$ が $\|f_{n+1} - f_n\| < 2^{-n}$ をみたすとする．ただし，$\|\cdot\|$ は $[0,1]$ 上のルベーグ測度に関する L^1 ノルムとする．

$$F_N(x) = |f_1(x)| + \sum_{n=1}^{N} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$$

とおく． ルベーグ積分の基本的な定理を用いて以下の問に答えよ．解答の際には，どのような定理をどのように用いたかを明確に説明せよ．

(1) 任意の $N \in \mathbf{N}$ について，

$$\|F_N\| \leq \|f_1\| + 1$$

が成り立つことを示せ．

(2) ほとんどいたるところ有限な $F(x) = \lim_{N\to\infty} F_N(x)$ が存在することを示せ．

(3) さらに，ほとんどいたるところ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在し有限確定であることを示せ．

(4) $f \in L^1([0,1])$ かつ $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ を示せ．

[7] $n \geq 3$ を整数とし， 正 n 角形を自分自身へうつす合同変換全体の作る群を D_{2n} と表す．また C_m で位数 m の巡回群を表す．

(1) 群 D_{2n} の位数は $2n$ であることを証明せよ．

(2) 2 つの複素行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$ および $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ で生成される $GL(2, \mathbf{C})$ の部分群を H とする．

(i) 群 H の位数を求めよ．

(ii) 群 H と同型になるような群 D_{2n} は存在するか？

(iii) 群 D_{2n} から群 H への全射準同型が存在するような n は存在するか？

(3) 群 D_{12} と直積群 $C_2 \times D_6$ は同型であることを証明せよ．

[8] 整数係数の 3 次以下の多項式であって，定数項が 1 であるもの全体のなす集合を M で表す；

$$M = \left\{1 + ax + bx^2 + cx^3 \,|\, a,\, b,\, c \in \mathbf{Z}\right\}.$$

M に演算 $*$ を，各 $f,\, g \in M$ に対し

$$f * g = \left(\begin{array}{l}\text{多項式としての普通の積 } fg \text{ の} \\ 4\text{ 次以上の項を無視したもの}\end{array}\right) \in M$$

と定義する．

(1) M はこの演算 $*$ に関しアーベル群をなすことを示し，$1+ax+bx^2+cx^3 \in M$ の逆元を求めよ．

(2) このアーベル群 M は有限生成自由アーベル群であることを示し，その ($\mathbf{Z}$ 加群としての) 基底を一つ求めよ．

(3) M の三つの元

$$f_1 = 1 + 2x + x^2 + 2x^3,\ f_2 = 1 + 6x^2 + 6x^3,\ f_3 = 1 + 2x - 5x^2 - 16x^3$$

により生成される M の部分群を N とする．このとき，剰余群 M/N のアーベル群としての構造を求めよ．

[9] $\mathbf{C}$ 内の空でない有界連結開集合 X 上の正則関数の空間を $R(X)$ と書く．$R(X)$ を各点での和，積に関する可換環とみなす．

(1) $R(X)$ は整域であることを示せ．

(2) 部分集合 $Y \subset X$ に対してその上で常に消えている関数の空間を $I(Y) := \{f \in R(X) \,|\, f(z) = 0, \forall z \in Y\}$ とする．

(i) $I(Y)$ は $R(X)$ のイデアルとなることを示せ．

(ii) $I(Y)$ が 0 イデアルでないのはどのようなときか．また 0 でない $I(Y)$ が素イデアルになるための必要十分条件を求めよ．

(3) $R(X)$ の素イデアルを全て求めよ．