

九州大学大学院数理学府
平成17年度修士課程入学試験
数学基礎科目問題(数学コース)

注意 • 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答せよ .

• 以下 \mathbb{N} は自然数の全体, \mathbb{R} は実数の全体, \mathbb{C} は複素数の全体を表す .

[1] a, b を実数, $\{a_n\}, \{b_n\}$ を実数列とする .

(1) 命題「数列 $\{a_n\}$ は a に収束する .」とその否定命題を ε - N 論法で述べよ .

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$ を証明せよ .

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = +\infty$ を証明せよ .

[2] 単位行列を I とする . n 次の直交行列のうち, 行列式の値が 1 となるもの全体の集合を $SO(n)$ と書く :

$SO(n) = \{A \mid A \text{ は実数を成分とする } n \text{ 次の正方行列で } {}^tAA = A^tA = I, \det A = 1\}$.

(1) どんな行列 $T \in SO(2)$ に対しても, ある実数 θ が存在して

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

と表されることを示せ .

(2) 行列 $A \in SO(3)$ で, その成分に 0 となるものが一つもないものを, 具体的に一つあげよ .

(3) 行列 $A \in SO(3)$ の固有値の絶対値は 1 であることを示せ . さらにその固有値の少なくとも一つは 1 であることを証明せよ .

(4) 行列 $A, B \in SO(3)$ が, 固有値 1 に対する固有ベクトルを共有しているならば $AB = BA$ を満たすことを証明せよ .

(5) 逆に行列 $A, B \in SO(3)$ が, $AB = BA$ を満たすならば, 固有値 1 に対する固有ベクトルを共有しているか? 正しければ証明をし, 誤りであるならば反例をあげよ .

[3]

- (1) (i) 関数 $f(x) = x\sqrt{x^2+1} + \log(x + \sqrt{x^2+1})$ の導関数を計算せよ .
(ii) 任意の整数 $n \geq 2$ に対して不等式

$$\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \sqrt{1-x^n+x^{2n}} dx < \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))$$

が成り立つことを証明せよ .

- (2) 次の重積分

$$\iiint\int_V xw \, dx dy dz dw$$

の値を求めよ . ただし

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, 0 \leq w \leq 1\}$$

とする .

[4] 二つの n 次複素正方行列 A, B が相似であるとは, $P^{-1}AP = B$ となる n 次複素正方正則行列 P が存在することと定義し, $A \sim B$ と書く .

- (1) \sim は n 次複素正方行列全体の集合の上の同値関係であることを証明せよ .
(2) 各 A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) を次で定義される 5 次正方行列とする . どの A_i とどの A_j が相似になるかを決定せよ . また相似になるときはそれぞれの場合に $P^{-1}A_iP = A_j$ となる正則行列 P を具体的に与えよ .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$
$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

[5] 次の楕円の周の長さを小数点以下第二位まで (切捨てで) 求めよ .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a = 1.02, b = 1).$$