

九州大学大学院数理学府
平成17年度修士課程入学試験
数学専門科目問題(数学コース)

- 注意 • 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9] の中から 2 題を選択して解答せよ .
• 以下 \mathbb{N} は自然数の全体 , \mathbb{R} は実数の全体 , \mathbb{C} は複素数の全体を表す .

[1] 5 文字 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上の置換全体からなる 5 次対称群 S_5 を考える .

- (1) 任意の群 G に対してその中心を $Z(G) = \{z \in G \mid xz = zx, \forall x \in G\}$ と定義する . $Z(G)$ は G の正規部分群であることを示せ .
- (2) S_5 の中心 $Z(S_5)$ を求めよ .
- (3) S_5 の位数 2 の元の個数を求めよ .
- (4) S_5 の位数 3 の元の個数を求めよ . また , 位数 3 の部分群の個数を求めよ .
- (5) S_5 の位数 6 の部分群の個数を求めよ .

[2] X を有限集合とし , A を X から実数体 \mathbb{R} への写像全体のなす集合とする .

- (1) $f, g \in A$ に対して $f + g, fg \in A$ を

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (fg)(x) &= f(x)g(x)\end{aligned}$$

で定義すると , A は単位元をもつ可換環になることを示せ .

- (2) $y \in X$ に対し , $\chi_y \in A$ を

$$\chi_y(x) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

で定義される写像とする . \mathfrak{a} を , A 自身とは一致しない A のイデアルとする . このとき , $f(z) \neq 0$ を満たす $f \in \mathfrak{a}$ と $z \in X$ が存在するならば , $\chi_z \in \mathfrak{a}$ となることを示せ .

- (3) A の任意の極大イデアルは , ある $z \in X$ によって

$$\{f \in A \mid f(z) = 0\}$$

と表されることを示せ .

[3] 以下では \mathbb{F}_3 を 3 元体とし, そのある代数閉包を $\overline{\mathbb{F}}_3$ とする.

- (1) 3 元体 \mathbb{F}_3 上のモニックな 2 次既約多項式をすべて求めよ.
- (2) (1) で求めた多項式の内の一つを選び, その $\overline{\mathbb{F}}_3$ における根を α とする. このとき, $\frac{1}{2\alpha+1}$ を α の整式として表せ.
- (3) $\overline{\mathbb{F}}_3$ の 0 以外の元がつくる乗法群を $\overline{\mathbb{F}}_3^\times$ とする. (1) で求めた多項式の根が $\overline{\mathbb{F}}_3^\times$ の中で生成する部分群の位数をそれぞれ求めよ.

[4] 閉区間 $[0, 1]$ を I と表す. 正方形 $I \times I$ に対して, 関係

$$\begin{aligned}(0, t) &\sim (1, t) & (\forall t \in I), \\ (s, 0) &\sim (s, 1) & (\forall s \in I)\end{aligned}$$

で生成される同値関係 \sim を考え, $X = (I \times I)/\sim$ をその同値関係による商空間 (等化空間) とする (すなわち, 正方形の対辺 $\{0\} \times I$ と $\{1\} \times I$, $I \times \{0\}$ と $I \times \{1\}$ を, それぞれ向きを合わせて同一視して得られる商空間を X とする.)

- (1) X はコンパクトであることを示せ.
- (2) $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を単位円周としたとき, 積空間 $T^2 = S^1 \times S^1$ はハウスドルフであることを示せ.
- (3) 写像 $f: I \times I \rightarrow T^2$ を,

$$f(s, t) = ((\cos 2\pi s, \sin 2\pi s), (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t))$$

で定める. このとき, 連続写像 $F: X \rightarrow T^2$ で, $f = F \circ \pi$ となるものが一意的に存在することを示せ. ここで, $\pi: I \times I \rightarrow X$ は自然な射影 (商写像, 等化写像) である.

- (4) $F: X \rightarrow T^2$ は同相写像となることを示せ.
- (5) $I \times I$ に対して, 関係

$$\begin{aligned}(0, t) &\sim' (1, 1-t) & (\forall t \in I), \\ (s, 0) &\sim' (1-s, 1) & (\forall s \in I)\end{aligned}$$

によって生成される同値関係 \sim' を新たに考え, $Y = (I \times I)/\sim'$ を商空間とする. X と Y は同相となるかを理由と共に答えよ.

[5] 与えられた正の定数 a, b ($a > b > 0$) に対して, 写像

$$p: D = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

を

$$p(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$$

によって定めると, p は 3次元ユークリッド空間内の曲面のパラメータ表示を与えている.

- (1) p の単位法線ベクトルを求めよ.
- (2) p のガウス曲率 K を u, v の式で表せ.
- (3) p の像を図示し, ガウス曲率が負となる部分を指摘せよ.
- (4) 曲面 $\tilde{p}(\tilde{u}, \tilde{v})$ の第一基本形式 ds^2 が

$$ds^2 = \tilde{E}(d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2), \quad \tilde{E} = \tilde{E}(\tilde{u}, \tilde{v})$$

と表されているとき, パラメータ (\tilde{u}, \tilde{v}) を等温パラメータという. 最初に与えられた曲面 p のパラメータを等温パラメータに変換せよ.

[6] 実定数 k に対して, 3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 の部分集合 M_k を

$$M_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = k\}$$

と定義する.

- (1) $k \neq 0$ ならば, M_k は多様体の構造を持つことを示せ.
- (2) $k = -1$ とし, $U = \{(x, y, z) \in M_{-1} \mid z > 0\}$ に次のように座標を与える:
 $\varphi: U \ni (x, y, z) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 $\psi: U \ni (x, y, z) \mapsto (u, v) \in D$. ただし $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < 1\}$ で

$$(u, v) = \frac{1}{1+z}(x, y).$$

このとき, 座標変換 $(u, v) \mapsto (x, y)$ を求めよ.

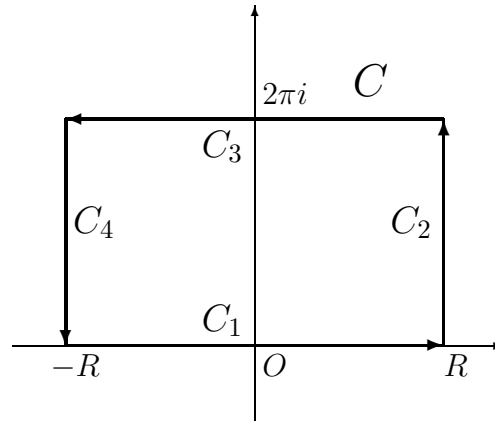
- (3) (2) の座標系 (u, v) を用いて U 上のベクトル場

$$X = \frac{\partial}{\partial u}$$

を定義する. このベクトル場を座標系 (x, y) から定まる $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ を用いて表せ.

[7] p を $0 < p < 1$ なる実数とするととき, 関数 $f(z) = \frac{e^{pz}}{1+e^z}$ を考える.

- (1) f の複素平面 \mathbb{C} におけるすべての極の位置, 位数および留数を求めよ.
- (2) 正の数 R に対して, C_1, C_2, C_3, C_4 からなる 下図のような閉曲線を C とするとき, 積分 $\oint_C f(z) dz$ を求めよ.
- (3) $R \rightarrow \infty$ とすると $\left| \int_{C_2} f(z) dz \right| \rightarrow 0, \left| \int_{C_4} f(z) dz \right| \rightarrow 0$ となることを示せ.
- (4) 実積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1+e^x} dx$ を求めよ.



[8] 実数全体 \mathbb{R} で定義された連続関数 $q_1(x), q_2(x)$ は, $q_1(x) < q_2(x)$ を満たすものとする. $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ はそれぞれ微分方程式

$$\begin{cases} \varphi_1'' + q_1(x)\varphi_1 = 0 \\ \varphi_2'' + q_2(x)\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

を満たすものとする. ある $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\alpha < \beta$) に対して $\varphi_1(\alpha) = \varphi_1(\beta) = 0$ であり, さらに任意の $x \in (\alpha, \beta)$ について $\varphi_1(x) > 0$ であるとする.

- (1) $\varphi_1'(\beta) < 0 < \varphi_1'(\alpha)$ であることを示せ.
- (2) 次の等式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (q_2(x) - q_1(x)) \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = \varphi_1'(\beta) \varphi_2(\beta) - \varphi_1'(\alpha) \varphi_2(\alpha)$$

が成り立つことを示せ.

- (3) φ_2 は零点を (α, β) 内に持つことを示せ. ここで φ_2 の零点とは,

$\varphi_2(x) = 0$ となる x のことである .

- (4) 実数全体 \mathbb{R} で定義された連続関数 $q(x)$ とある $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) に対して ,
 $[a, b]$ における実数 λ をパラメータとする常微分方程式の境界値問題

$$\begin{cases} -\varphi'' + q(x)\varphi = \lambda\varphi \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \end{cases}$$

を考える . 二つの パラメータ値 $\lambda_1 < \lambda_2$ で $\varphi(x) \neq 0$ である解が存在する
 とする . このとき λ_1 に対応する解 φ_1 より λ_2 に対応する解 φ_2 の方が多
 くの零点を (a, b) 内に持つことを示せ .

[9] (X, \mathcal{M}, μ) を測度空間とする . 以下の問に答えるのに , ルベグ積分論の
 基本的な定理を用いてもよいが , その際には , どのような定理をどのように用い
 たかを明確に説明せよ .

- (1) 可測集合の列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ を満たすとする . この
 とき $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ とおくと , 各 $x \in X$ に対して

$$\chi_{A_n}(x) \rightarrow \chi_A(x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つことを示せ . ただし , χ_B は集合 B の定義関数

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & (x \in B) \\ 0 & (x \notin B) \end{cases}$$

とする .

- (2) 可測集合の列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mu(E_n) < 2^{-n}$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たすとする . こ
 のとき $F_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$, $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ とおくと , $\mu(F) = 0$ となることを示せ .

- (3) f を X 上の可積分関数とすると , 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在
 して任意の $E \in \mathcal{M}$ に対して

$$\mu(E) < \delta \quad \text{ならば} \quad \int_E |f| d\mu < \varepsilon$$

が成り立つことを示せ .

- (4) f, f_n ($n = 1, 2, \dots$) を X 上の可積分関数とし , $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$ が
 成立しているとする . このとき , 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在
 して任意の n と任意の $E \in \mathcal{M}$ に対して

$$\mu(E) < \delta \quad \text{ならば} \quad \int_E |f_n| d\mu < \varepsilon$$

が成り立つことを示せ .