九州大学大学院数理学府
平成18年度修士課程入学試験
数学基礎科目問題 (数学コース)

注意
- 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答せよ．
- 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1]　次の (1) から (4) の命題の真偽を述べよ．また，正しいものには証明を与え，誤っているものには反例をあげ，それが反例になることを説明せよ．

(1) 任意のベクトル空間 V の部分ベクトル空間 X, Y, Z について，

$$(X+Y)\cap Z = (X\cap Z)+(Y\cap Z)$$

が成り立つ．ここで，V の勝手な部分集合 A, B に対して，

$$A+B=\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in V \mid \boldsymbol{a}\in A, \boldsymbol{b}\in B\}$$

である．

(2) 閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，ある連続関数に $[0,1]$ 上で各点収束しているとする．このとき，関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次の意味で有界である：

$$\exists K>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1],\quad |f_n(x)|\le K.$$

(3) $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 $f(x)$ が $x=0$ で微分可能で $f'(0)>0$ ならば，ある $\varepsilon>0$ が存在して，$-\varepsilon<a<b<\varepsilon$ となる任意の a, b に対して $f(a)<f(b)$ となる．

(4) 2次の実正方行列 A が $A^2=A$ をみたせば，$A=O$（零行列）か $A=I$（単位行列）となる．

[2] 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) 点列 $\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}, A^2\boldsymbol{v}, A^3\boldsymbol{v}, \ldots, A^n\boldsymbol{v}, \ldots$ が収束するような $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ 全体の集合を V とおく．V は $\mathbb{R}^2$ の部分ベクトル空間となることを示せ．

(3) V の基底を一つ具体的に与えよ．

[3] n は 2 以上の自然数，$A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$ は n 次の実正方行列とする．

(1) A の行列式 $\det A$ の定義を書け．

(2) 実数 x_i, y_j $(x_i \neq y_j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$ に対して，a_{ij} が

$$a_{ij} = \frac{1}{x_i - y_j}$$

と表されるとき，次式が成り立つことを示せ．

$$\det A = \frac{\displaystyle\prod_{j=2}^{n}(x_1 - x_j)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(x_1 - y_j)} \cdot \frac{\displaystyle\prod_{j=2}^{n}(y_j - y_1)}{\displaystyle\prod_{i=2}^{n}(x_i - y_1)} \det B$$

ただし，$B = (a_{ij})_{2 \le i \le n, 2 \le j \le n}$ は，A から第 1 行と第 1 列を取り除いて得られる $n-1$ 次の正方行列である．

(3) (2) の A に対し，次式が成り立つことを示せ．

$$\det A = \frac{\displaystyle\prod_{1 \le i < j \le n}(x_i - x_j)(y_j - y_i)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(x_i - y_j)}$$

[4]

(1) a を正定数とする．$\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} m^{-a}$ が収束するかどうかを判定し，その理由を述べよ．

(2) $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ を実数列とする．自然数 n に対して

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\cos(b_m x)}{m^2}$$

とおく．各 $x \in \mathbb{R}$ に対し，極限

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

が存在することを示せ．

(3) (2) の $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上の連続関数となることを示せ．

(4) 数列 $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ が有界であれば，(2) の関数 $f(x)$ は微分可能であり，

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

がすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して成り立つことを示せ．

[5] $f(x)$, $g(x)$ を 2 次の実係数多項式とする．ただし，方程式 $g(x) = 0$ は実数解を持たないとする．関数 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$F(x,y) = \frac{f(x)}{g(y)}$$

で定義するとき，以下のそれぞれの場合に $F(x,y)$ が極値を持つかどうかを判定せよ．さらに，極値を持つ場合は，極値を取る点の個数を求めよ．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ も実数解を持たないとき．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が 2 つの相異なる実数解を持つとき．