九州大学大学院数理学府
平成18年度修士課程入学試験
数学専門科目問題(数学コース)

注意 • 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9] の中から 2 題を選択して解答せよ．

• 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること．

• 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ とおく．

(1) G は行列の乗法に関して群をなすことを示せ．

(2) G の中心 $Z = \{x \in G \,|\, xy = yx, \forall y \in G\}$ を求めよ．

(3) 商群 G/Z は加法群 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と同型であることを示せ．

[2] p を素数とし，$\mathbb{Z}[x]$ を $\mathbb{Z}$ 係数の一変数多項式環とする．

(1) $\mathbb{Z}[x]$ において p で生成されるイデアル (p) は素イデアルであることを示せ．

(2) $\mathbb{Z}[x]$ の極大イデアル I で，$(p) \subset I$ であるものの例を一つあげよ．

(3) $\mathbb{Z}[x]$ のモニックな元

$$f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

（ただし，$i = 0, 1, \ldots, n-1$ に対し $a_i \in \mathbb{Z}$ である）が次の条件をみたすとする：

p^2 は a_0 を割らないが，p はすべての a_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ を割る．

このとき $f(x)$ は既約であることを示せ．

(4) $\mathbb{Z}[x]$ の元 $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} x^i$ は既約であることを示せ．

[3]　$\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/7}$ とし,

$$\alpha = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4,\ \beta = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6,\ \gamma = \zeta + \zeta^6,\ \delta = \zeta^2 + \zeta^5,\ \varepsilon = \zeta^3 + \zeta^4$$

とおく.

(1) $\alpha + \beta,\ \alpha\beta \in \mathbb{Q}$ となることを示せ.

(2) 拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

(3) $\gamma + \delta + \varepsilon,\ \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\gamma,\ \gamma\delta\varepsilon \in \mathbb{Q}$ となることを示せ.

(4) 拡大次数 $[\mathbb{Q}(\varepsilon) : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

[4]　$(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$$

により同値関係を定め，この同値関係による商空間を $T^2 = \mathbb{R}^2/\sim$ とおく．$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を含む同値類を $[x, y] \in T^2$ と書き，$p(x, y) = [x, y]$ で写像 $p : \mathbb{R}^2 \to T^2$ を定める．

次に，T^2 上に

$$[x, y] \simeq [x', y'] \Leftrightarrow [x, y] = [x', y'] \text{ あるいは } [x, y] = [-x', -y']$$

により同値関係を定め，この同値関係による商空間を $X = T^2/\simeq$ とおく．$[x, y] \in T^2$ を含む同値類を $[[x, y]] \in X$ と書き，$\pi[x, y] = [[x, y]]$ で写像 $\pi : T^2 \to X$ を定める．

(1) p を $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ に制限した写像は T^2 への連続な全射となり，$\mathring{I} \times \mathring{I}$ に制限した写像は単射となることを示せ．ただし，I は閉区間 $[0, 1]$ を表し，$\mathring{I}$ は開区間 $(0, 1)$ を表す.

(2) $\pi \circ p : \mathbb{R}^2 \to X$ を $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$ に制限した写像は X への連続な全射となり，$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\}$ に制限した写像は単射となることを示せ.

(3) $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1,\ x > 0,\ y > 0\}$ とする.

$$\pi[x, y] = \pi[x', y']$$

となるすべての $[x', y'] \in T^2$ を求めよ．次に，このような点が自分自身（すなわち $[x, y]$）に限るような T^2 の点をすべて求めよ.

(4) X がコンパクトになることを示せ.

(5) X が 2 次元球面と同相となることを示せ.

[5] n は 2 以上の自然数とする．n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の 2 つのベクトル v_1, v_2 からなる組 (v_1, v_2) に対し，条件

(i) 各 v_i の長さは 1,

(ii) v_1 と v_2 は直交する,

を考える．$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^{2n}$ と自然に同一視し,

$$V = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n} \mid (v_1, v_2) \text{ は (i) と (ii) をみたす}\}$$

とおく．このとき，V は $\mathbb{R}^{2n}$ の $2n-3$ 次元 C^∞ 級部分多様体になることを示せ．

[6] xy 平面上の C^2 曲線

$$\gamma(s) = \bigl(x(s), y(s)\bigr) \qquad (-a \leq s \leq a)$$

が与えられているとする．ただし，$y(s) > 0$ $(-a \leq s \leq a)$，かつ s は弧長パラメータとする．すなわち

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

である．この曲線を x 軸のまわりに回転させて得られる回転面のガウス曲率が一定で -1 であるとき，以下を示せ．

(1) $\dfrac{d^2y}{ds^2} = y$ が成り立つ．

(2) さらに $\dfrac{dy}{ds}(0) = 0$ とすると,

$$y(0) \leq \frac{1}{\sinh a}$$

が成り立つ．

[7] n を 2 以上の自然数，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ を相異なる複素数,

$$f(z) = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$$

とする.

(1) $\dfrac{1}{f(z)}$ の $z = a_j$ における留数を求めよ.

(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{f'(a_j)} = 0$ であることを示せ.

(3) $0 \leq k \leq n-1$ に対して $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^k}{f'(a_j)}$ を求めよ.

[8] $A(x)$ は n 次正方行列で，各成分が x について開区間 (a,b) 上で連続であるとする．$Y(x)$ は n 次正方行列で，開区間 (a,b) 上で

$$\frac{dY(x)}{dx} = A(x)Y(x) \tag{E_0}$$

をみたし，ある $x_0 \in (a,b)$ について $Y(x_0) = I$ が成り立つものとする．ただし I は n 次の単位行列である.

(1)
$$\frac{d}{dx}\det Y(x) = (\operatorname{tr} A(x)) \det Y(x) \tag{E_1}$$
が成り立つことを示し，任意の $x \in (a,b)$ に対して $\det Y(x) \neq 0$ であることを示せ.

(2) M_0 を $n \times n$ 定数行列とし，$M(x) = Y(x)M_0Y(x)^{-1}$ とおく．このとき $M(x)$ は
$$\frac{dM(x)}{dx} = A(x)M(x) - M(x)A(x) \tag{E_2}$$
をみたすことを示せ.

(3) 上の (E_2) を $M(x)$ に対する微分方程式とみなす．$N(x)$ を (E_2) の解とすると，勝手な $x_1, x_2 \in (a,b)$ に対し，$N(x_1)$ と $N(x_2)$ とは相似な行列であることを示せ．なお，2 つの正方行列 N_1, N_2 が相似であるとは，ある正則行列 P が存在して $N_1 = PN_2P^{-1}$ となるときをいう.

[9]　測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ で考える．すなわち，X は集合，$\mathfrak{B}$ は X の部分集合から成る一つの σ-加法族（σ-algebra），μ は $\mathfrak{B}$ を定義域とする測度である．

(1) $A_n \in \mathfrak{B}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とし，$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ であると仮定する．このとき $\mu\Bigl(\limsup_{n\to\infty} A_n\Bigr) = 0$ であることを示せ．

(2) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに X 上の $\mathfrak{B}$ 可測な関数の列で，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\bigl(\{x \in X \mid f_n(x) \neq g_n(x)\}\bigr) < \infty$$

をみたしていると仮定する．このとき，$\mu(A) = 0$ となる $A \in \mathfrak{B}$ を適当にとれば，各 $x \notin A$ に対して，番号 $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq n_0$ をみたすすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x) = g_n(x)$ となることを示せ．