

九州大学大学院数理学府
平成19年度修士課程入学試験
数学基礎科目問題(数学コース)

- 注意
- 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答せよ.
 - 以下 \mathbb{N} は自然数の全体, \mathbb{R} は実数の全体, \mathbb{C} は複素数の全体を表す.

[1] ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 において, 単位ベクトル \mathbf{n} に直交し, 原点を通る平面を Π とする. 各点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して, Π に関して \mathbf{x} と対称な点 $\mathbf{y} = T\mathbf{x}$ を対応させる写像 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ について, 以下の問に答えよ.

- (1) T は線形写像であることを示せ.
- (2) \mathbb{R}^3 の恒等写像を I で表す. $\frac{1}{2}(I - T)$, $\frac{1}{2}(I + T)$ はそれぞれどんな写像か.
- (3) T のすべての固有値と, それらに対応する固有空間を求めよ.
- (4) \mathbb{R}^3 の適当な正規直交基底をとることによって, T の表現行列を対角行列にすることができるか.

[2] 以下の問に答えよ.

- (1) 次の積分を計算せよ.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

- (2) 次の積分を計算せよ. ただし $\alpha > 0$ は定数である.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

- (3) 行列 A とベクトル \mathbf{x} を次で与える.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 における $A\mathbf{x}$ と \mathbf{x} の内積を $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ で表すとき, 次の積分を計算せよ.

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} dx dy dz$$

[3] 以下の問に答えよ.

- (1) \mathbb{R} 上で定義された関数 $f(x)$ が \mathbb{R} 上で C^1 級であることの定義を述べよ.
- (2) 関数 $g(x) = |x|^{5/3}$ は \mathbb{R} 上で C^1 級であることを示せ.
- (3) (2) の関数 $g(x)$ は \mathbb{R} 上で C^2 級ではないことを示せ.
- (4) \mathbb{R} 上の実数値関数 $h(x)$ で, C^{30} 級ではあるが C^{31} 級ではないものの例を具体的に構成せよ.

[4] $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は区間 $I = [0, 1]$ 上の連続関数の列であり, $f(x)$ は区間 I 上の関数であるとする. 以下の問に答えよ.

- (1) 次の (i), (ii) の定義を述べよ.
 - (i) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(x)$ に区間 I で各点収束する.
 - (ii) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(x)$ に区間 I で一様収束する.
- (2) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(x)$ に I で一様収束するとき, $f(x)$ は I で連続になることを示せ.
- (3) (2) において, 「 I で一様収束」という仮定を, 「 I で各点収束」に置き換えたとき, 同様のことが成り立つか. 成り立つならばそれを証明し, 成り立たなければ反例をあげよ.
- (4) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(x)$ に I で一様収束するとき, 次の成り立つことを示せ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

- (5) (4) において, 「 I で一様収束」という仮定を, 「 I で各点収束」に置き換えたとき, 同様のことが成り立つか. 成り立つならばそれを証明し, 成り立たなければ反例をあげよ.

[5] 以下の問に答えよ.

(1) S, T は線形写像 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ であるとする.

(i) $ST = TS$ が成り立っていると仮定する. S の核を $\text{Ker}(S)$, S の像を $\text{Im}(S)$ で表すとき,

$$T(\text{Ker}(S)) \subset \text{Ker}(S), \quad T(\text{Im}(S)) \subset \text{Im}(S)$$

となることを示せ.

(ii) S の階数は 1 で, S^2 は零写像ではないとする. このとき, $\text{Im}(S)$ は S の一つの固有空間で, 対応する固有値は 0 でないことを示せ.

(2) C, D は 3 次の実正方行列で, C の階数は 2, かつ D^2 は零行列 O ではないとする. さらに $CD = DC = O$ が成り立っていると仮定する.

(i) D の階数は 1 であることを示せ.

(ii) ある 3 次の実正則行列 Q , 2 次の実正則行列 $\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$, そして 0 でない実数 d が存在して,

$$QCQ^{-1} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_3 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad QDQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

となることを示せ.

九州大学大学院数理学府
平成19年度修士課程入学試験
数学基礎科目問題 (数理科学コース)

- 注意
- 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答せよ.
 - 以下 \mathbb{N} は自然数の全体, \mathbb{R} は実数の全体, \mathbb{C} は複素数の全体を表す.

[1] 3×3 行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. 次の問に答えよ.

- (1) $A = BC$ となる行列 C を求めよ.
- (2) A のすべての固有値, およびそれらに対応する固有ベクトルを求めよ.
- (3) $D = CB$ とすると, 行列 A と D の固有値はすべて一致することを示せ.

[2] ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 において, 単位ベクトル \mathbf{n} に直交し, 原点を通る平面を Π とする. 各点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して, Π に関して \mathbf{x} と対称な点 $\mathbf{y} = T\mathbf{x}$ を対応させる写像 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ について, 以下の問に答えよ.

- (1) T は線形写像であることを示せ.
- (2) \mathbb{R}^3 の恒等写像を I で表す. $\frac{1}{2}(I - T), \frac{1}{2}(I + T)$ はそれぞれどんな写像か.
- (3) T のすべての固有値と, それらに対応する固有空間を求めよ.
- (4) \mathbb{R}^3 の適当な正規直交基底をとることによって, T の表現行列を対角行列にすることができるか.

[3] 以下の問に答えよ.

(1) 次の積分を計算せよ.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

(2) 次の積分を計算せよ. ただし $\alpha > 0$ は定数である.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

(3) 行列 A とベクトル \mathbf{x} を次で与える.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 における $A\mathbf{x}$ と \mathbf{x} の内積を $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ で表すとき, 次の積分を計算せよ.

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} dx dy dz$$

[4] 以下の問に答えよ.

(1) \mathbb{R} 上で定義された関数 $f(x)$ が \mathbb{R} 上で C^1 級であることの定義を述べよ.

(2) 関数 $g(x) = |x|^{5/3}$ は \mathbb{R} 上で C^1 級であることを示せ.

(3) (2) の関数 $g(x)$ は \mathbb{R} 上で C^2 級ではないことを示せ.

(4) \mathbb{R} 上の実数値関数 $h(x)$ で, C^{30} 級ではあるが C^{31} 級ではないものの例を具体的に構成せよ.

[5] 閉区間 $I = [0, 1]$ で定義された実数値連続関数 $p(x)$ について、以下の間に答えよ。

(1) $t > 0$ に対して、

$$I(t) = \int_0^1 e^{-tx} p(x) dx$$

とおくとき、 $|I(t)| \leq \frac{M}{t}$ となることを示せ。ただし、 M は関数 $|p(x)|$ の I における最大値である。

(2) $t > 0$, $0 < r \leq 1$ に対して、

$$J(t, r) = t \int_0^r e^{-tx} p(x) dx$$

とおく。 $0 < r < 1$ のとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (J(t, 1) - J(t, r)) = 0$$

が成り立つことを示せ。

(3) (2) で定義された $J(t, r)$ に対して、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J(t, 1) = p(0)$$

となることを示せ。

九州大学大学院数理学府
平成19年度修士課程入学試験
数学専門科目問題(数学コース)

- 注意
- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9] の中から 2 題を選択して解答せよ.
 - 解答用紙は, 問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること.
 - 以下 \mathbb{N} は自然数の全体, \mathbb{Z} は整数の全体, \mathbb{Q} は有理数の全体, \mathbb{R} は実数の全体, \mathbb{C} は複素数の全体を表す.

[1] $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ を 2 元体とし, \mathbb{F}_2 上のベクトル空間 $V = \mathbb{F}_2^2$ の元 v_1, v_2, v_3 を

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で定める. 以下の問に答えよ.

- (1) 一般線形群 $GL(2, \mathbb{F}_2)$ の元 A に対して, $Av_k = v_{i_k}$ ($k = 1, 2, 3$) のとき, 3 次対称群 \mathfrak{S}_3 の元 $\varphi(A)$ を,

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$$

で定める. 写像 $\varphi: GL(2, \mathbb{F}_2) \rightarrow \mathfrak{S}_3$ は, 群の間の同型写像を定めることを示せ.

- (2) $\Phi: GL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow GL(2, \mathbb{F}_2)$ を自然な準同型とする. Φ は全射となることを示せ.
- (3) $GL(2, \mathbb{Z})$ の部分集合で, 各行および各列にちょうど一つの奇数を成分にもつ行列の全体を G とする. $GL(2, \mathbb{F}_2)$ の部分群 H で, $G = \Phi^{-1}(H)$ となるものを具体的に与えよ.
- (4) G は $GL(2, \mathbb{Z})$ の部分群であることを示し, その指数を求めよ.
- (5) G は $GL(2, \mathbb{Z})$ の正規部分群かどうか, 理由とともに述べよ.

[2] 次の (1)~(3) の問に答えよ.

- (1) 可換環 R のイデアル I が素イデアルであることの定義を述べよ.
- (2) 零イデアルでも極大イデアルでもない素イデアルを持つような環, 及びそのような素イデアルの例をあげよ. 証明もつけること.
- (3) 可換環 R の単位イデアルとは異なる単項イデアルがすべて素イデアルであるとき R は体である. これを証明せよ.

[3] 本問においては、「自己同型」はすべて「体としての自己同型」を意味するものとする。以下の問に答えよ。

- (1) 有理数体 \mathbb{Q} の自己同型は恒等写像に限ることを示せ。
- (2) 有理数体上の1変数有理関数体 $\mathbb{Q}(X)$ の自己同型 σ であつて、 $\sigma(X) = X+1$ をみたすものが唯一つ存在することを示せ。
- (3) 有理数体の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ の自己同型 σ であつて、次の性質 (*) を持つものは存在しないことを示せ：
 (*) ある $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ に対して $\sigma(x) = x+1$ となる。
- (4) p を素数とする。 p 元体の代数閉包 $\overline{\mathbb{F}_p}$ の自己同型 σ であつて、ある $x \in \overline{\mathbb{F}_p}$ に対して $\sigma(x) = x+1$ となるものが存在することを示せ。

[4] \mathbb{R}^n のユークリッド距離を $d(\cdot, \cdot)$ で表し、 \mathbb{R}^n 内の空でないコンパクト集合の全体を $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ で表す。 $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$$\rho(A, B) = \inf\{\delta > 0 \mid A_\delta \supset B \text{ かつ } B_\delta \supset A\}$$

とおく。ただし $C \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ に対して、 C_δ は C の δ 近傍を表す。すなわち、

$$C_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{ある } y \in C \text{ に対して } d(x, y) < \delta\}$$

である。いま \mathbb{R}^n の空でないコンパクトな部分集合の減少列 $F^0 \supset F^1 \supset F^2 \supset \dots$ が与えられたとする。

$$F = \bigcap_{m=0}^{\infty} F^m$$

とおくとき、以下の問に答えよ。

- (1) ρ は $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 上の距離を定めることを示せ。
- (2) F は空でないコンパクト集合であることを示せ。
- (3) $\rho(F^m, F) \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) を証明せよ。

[5] 複素 z -平面 \mathbb{C}_z と複素 w -平面 \mathbb{C}_w を $w = \frac{1}{z}$ で貼り合わせた実2次元 C^∞ 級多様体を $\widehat{\mathbb{C}}$ と書き、リーマン球面という。 $w = 0$ に対応する点 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{C}_z$ を ∞ と書き、無限遠点と呼ぶ。このとき、定数でない任意の多項式写像 $f: \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_z$ は、 $f(\infty) = \infty$ と定めることによって、 $\widehat{\mathbb{C}}$ から $\widehat{\mathbb{C}}$ への C^∞ 級写像になることを示せ。

[6] 複素数を成分とする2次正方行列全体の集合を $M(2, \mathbb{C})$ で表す. $M(2, \mathbb{C})$ を $\mathbb{C}^4 = \mathbb{R}^8$ と同一視し, ユークリッド空間とみなしておく. $A \in M(2, \mathbb{C})$ に対して $A^* = {}^t\bar{A}$ と書くことにし,

$$SU(1, 1) = \{A \in M(2, \mathbb{C}) \mid \det A = 1, A^*J = JA^{-1}\}$$

と定める. ただし, $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である. 以下の問に答えよ.

- (1) $SU(1, 1)$ には実3次元多様体の構造が入ることを示せ.
- (2) $SU(1, 1)$ はコンパクトではないことを示せ.
- (3) $SU(1, 1)$ は弧状連結であることを示せ.

[7] 以下の問に答えよ. ただし, 現れる関数はすべて実数値関数である.

- (1) $t \geq 0$ で定義された C^1 級の関数 $u(t)$ が, 次の微分不等式をみたすとする.

$$\frac{d}{dt}u(t) \leq Cu(t) \quad (C \text{ は正の定数})$$

このとき, ある $t_0 \geq 0$ で $u(t_0) = 0$ であるならば, すべての $t \geq t_0$ で $u(t) \leq 0$ となることを, 関数 $v(t) = e^{-Ct}u(t)$ を利用して示せ.

- (2) $t \geq 0$ で定義された C^1 級の関数 $z(t)$ が, 次の微分不等式をみたすとする.

$$\frac{d}{dt}z(t) \leq D|z(t)| \quad (D \text{ は正の定数})$$

このとき, $z(0) = 0$ ならば, すべての $t \geq 0$ で $z(t) \leq 0$ であることを示せ.

- (3) $f(t, x)$ は $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$ で定義された連続関数で, ある定数 $K > 0$ が存在して, すべての $t \geq 0$ と $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$$

をみたしているとする. このとき, $t \geq 0$ で定義された C^1 級の関数 $x(t), y(t)$ で,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad \frac{dy(t)}{dt} \geq f(t, y(t))$$

をみたし, かつ $x(0) = y(0)$ をみたすものを考える. $t \geq 0$ では $x(t) \leq y(t)$ であることを示せ.

[8] べき級数

$$(*) \quad \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \quad (z \in \mathbb{C}, c_j \in \mathbb{C})$$

は $z = 2$ で収束しているとする。以下の問に答えよ。

(1) 正の数 M が存在して、すべての $j = 0, 1, 2, \dots$ に対して、 $|c_j| \leq \frac{M}{2^j}$ となることを示せ。

(2) べき級数 $(*)$ は、 $|z| < 2$ で広義一様収束することを示せ。

以下、べき級数 $(*)$ で定義される $|z| < 2$ 上の関数を $f(z)$ で表す。

(3) ある自然数 n が存在して、 $|z| < 2$ において不等式 $|f(z)| \leq C|z|^n$ ($C > 0$ は定数) が成り立っているとする。このとき、 $|z| < 2$ で正則な関数 $g(z)$ で、 $f(z) = z^n g(z)$ となるものが一意的に存在することを示せ。

(4) (3) における n が、 $\sup_{j=0,1,2,\dots} 2^j |c_j| < 2^{n-1}$ をみたしているとする。このとき、 $F(z) = z^n - f(z)$ とおくと、

$$\int_{|z|=1} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = 2\pi i n$$

が成り立つことを示せ。ただし、積分路は正の向きをとるものとする。

[9] 以下の問に答えよ。

(1) f_n ($n = 1, 2, \dots$) は \mathbb{R} 上のルベーク可積分な関数で、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx = 0$ をみたしているとする。

(i) $\{f_n\}$ の部分列 $\{f_{n_k}\}$ で

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| dx < \infty$$

となるものが存在することを示せ。

(ii) (i) で求めた部分列 $\{f_{n_k}\}$ は、 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = 0$ (a.e. $x \in \mathbb{R}$) をみたすことを示せ。

(2) \mathbb{R} 上のルベーク可積分な関数 f_n ($n = 1, 2, \dots$) と f が次の (a), (b) をみたしているとする：

(a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ (a.e. $x \in \mathbb{R}$),

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$.

このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx = 0$ であることを示せ。