

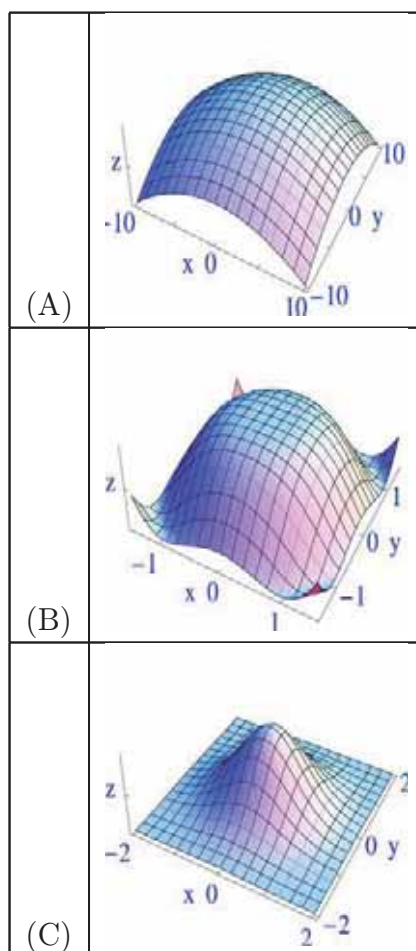
九州大学大学院数理学府
 修士課程入学試験
 数学問題 (MMA コース)
 (見本版)

- 注意
- 問題 [1][2][3][4][5][6][7] の中から 3 題を選んで解答しなさい.
 - 以下 \mathbb{R} は実数の全体を表します.

[1] 以下の問に答えなさい.

(1) 下のグラフ (A), (B), (C) に対応する関数を

- (i) $z = e^{-(x^2+y^2)}$, (ii) $z = \cos(x^2 + y^2)$, (iii) $z = -x^2 - y^2$
 から選びなさい.



(※ グラフの軸は左奥から右手前が x の正の方向, 左手前から右奥が y の正の方向, 上向きが z の正の方向です.)

(2) 次の重積分の値を求めなさい.

$$\iint_{\substack{\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq 1 \\ x\geq 0, y\geq 0}} x \, dx \, dy$$

[2] 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$ ($a \in \mathbb{R}$) について, 以下の間に答えなさい.

(1) $a = 1$ のとき, 逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(2) $x \in \mathbb{R}$ に対して, $xI - A$ の行列式を求めて, x の多項式の形で表わしなさい. ただし, I は 3×3 の単位行列とします.

(3) $a = 2$ のとき, A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

[3] 以下の間に答えなさい.

(1) $y = y(x)$ に関する次の微分方程式を解きなさい.

$$y' = y^2 \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

(2) $y = y(x)$ に関する次の微分方程式の一般解を求めなさい.

$$y'' - y = e^x \sin x$$

[4] 次の複素積分を計算しなさい. 積分路 C は単位円周 $|z| = 1$ で向きは反時計回りとします.

(1)
$$\oint_C \frac{\cos 2\pi z}{(2z-1)^2(3z+1)} dz$$

(2)
$$\oint_C \frac{z}{\cos 2z} dz$$

[5] 以下の問に答えなさい.

(1) α を正の定数とし, 関数 f を,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq \alpha) \\ 1 & (\alpha < t \leq 3\alpha) \\ 2 & (3\alpha < t) \end{cases}$$

で与えます. f のラプラス変換 $F(s)$ を計算しなさい.

(2) 次の関数 G のラプラス逆変換 $g(t)$ を求めなさい.

$$G(s) = \frac{1}{s}(e^{-2s} - e^{-s})$$

[6] θ を $0 < \theta < \pi$ をみたす定数とし, $f(x)$ を次で定義される区間 $[-\pi, \pi]$ 上の関数とします.

$$f(x) = \begin{cases} \pi - \theta & (|x| \leq \theta) \\ -\theta & (\theta < |x| \leq \pi) \end{cases}$$

以下の問に答えなさい.

(1) 区間 $[-\pi, \pi]$ における $f(x)$ のフーリエ級数展開を求めなさい.

(2) 次の等式が成り立つことを示しなさい.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

[7] 確率変数 X が2項分布 $B(n, p)$ に従うとは, その確率分布が次の離散型確率分布で与えられることです.

$$\Pr\{X = x\} = {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

ただし n は自然数, ${}_n C_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$, p は $0 < p < 1$ をみたす定数です.

互いに独立な確率変数 X と Y がそれぞれ2項分布 $B(n, p)$ に従うとします. このとき, 以下の問に答えなさい.

(1) $X + Y$ が2項分布 $B(2n, p)$ に従うことを示しなさい.

(2) $z = 1, 2, \dots, 2n$ を固定したとき, 次の条件付き確率を求めなさい.

$$\Pr\{X = x \mid X + Y = z\}, \quad x = 0, 1, \dots, z$$