九州大学大学院数理学府
平成21年度修士課程入学試験
数学基礎科目問題(数理学コース数学型)

注意 ● 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答せよ.
● 以下 $\mathbb{N}$ は自然数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体を表す.

[1] 次の2変数関数 $f(x,y)$ の領域 D 上での極値を求めよ.

$$f(x,y) = \sin x \, \sin y \, \sin(x+y),$$
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

[2] 次の行列 A に対して以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -5 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような3次正則行列 P を一つ求めよ.

(3) 次の条件 (a), (b) をみたす3次正方行列 B を一つ求めよ.

(a) $A = B^2$,

(b) B のすべての固有値は負でない実数である.

(4) 問 (3) の条件 (a), (b) をみたす3次正方行列 B は問 (3) で求めたものに限ることを示せ.

[3]

(1) 等式：

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{N-1}x^{2N-2} + \frac{(-1)^N x^{2N}}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N})$$

を用いて，次を示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は収束しないことを示せ．

(3) α を任意の正の実数とする．このとき，次の不等式を同時にみたすような自然数 k_1, k_2 $(k_1 < k_2)$ が存在することを示せ．

$$\alpha \leq \sum_{n=1}^{k_1} \frac{1}{n} \leq \alpha + 1,$$

$$\alpha - \frac{1}{2} \leq \sum_{n=1}^{k_1} \frac{1}{n} - \sum_{n=k_1+1}^{k_2} \frac{1}{n} \leq \alpha.$$

(4) 任意の正の実数 α に対して，a_n を適当に選ぶことにより，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

は，実数 α に収束することを示せ．ただし各 a_n は 1 又は -1 とする．

[4] 実数を成分とする正方行列 B が交代行列，すなわち $B = -{}^tB$ をみたすとする．ただし ${}^tB$ は B の転置行列である．さらに $A = B^2$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) A の固有値は，すべて 0 以下の実数になることを示せ．

(2) 0 以外の固有値に対する A の固有空間は偶数次元になることを示せ．

[5] $C(a,b)$ を点 (a,b) を中心とする半径 1 の円周とする．反時計回りに $C(a,b)$ に沿う線積分

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_{C(a,b)} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

を考える．ただし $a^2+b^2 \neq 1$ とする．次の問に答えよ．

(1) $\mathrm{I}(0,0)$ の値を求めよ．

(2) $\mathrm{I}(1,1)$ の値を求めよ．

(3) $\mathrm{I}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ の値を求めよ．