九州大学大学院数理学府
平成24年度修士課程入学試験
数学問題(MMAコース)

注意
- 問題[1][2][3][4][5][6][7]の中から3題を選んで解答せよ．
- 以下 $\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] a を正の定数とする．xy 平面上で定義された関数 $f(x,y)=y(a-x^2-y)$ に対して以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ となる (x,y) をすべて求めよ．

(2) $f(x,y)$ のヘッセ行列式は次のように定義される．$H_f(x,y)$ を求めよ．

$$H_f(x,y)=\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

(3) (1)で求めた (x,y) に対して，関数 $f(x,y)$ が極大値，極小値をとるかどうかを判定し，極値をとる場合は極値を求めよ．

[2] a,b は定数とする．行列 $M_{a,b}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．

(1) 行列 $M_{2,1}$ のすべての固有値を求めよ．

(2) 自然数 n に対して行列 $(M_{2,1})^n$ を求めよ．

(3) 行列 $M_{a,b}$ の階数を求めよ．

[3]　以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{du}{dx} = u(2-u)$

(2) $\dfrac{d^2u}{dx^2} - \dfrac{du}{dx} - 12u = 0$

(3) $\dfrac{d^2u}{dx^2} - \dfrac{du}{dx} - 12u = -12x^2 + 22x + 4$

[4]　$p(x|\lambda)$ でパラメータ $\lambda > 0$ のポアソン分布の確率関数を表す．すなわち，

$$p(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) x を一つ固定するとき，$p(x|\lambda)$ を最大にする λ を求めよ．

(2) 次の等式を示せ．

$$\sum_{x=0}^{\infty} (x-\lambda)p(x|\lambda) = 0$$

(3) λ が自然数のとき，次の等式を示せ．

$$\sum_{x=0}^{\infty} |x-\lambda| p(x|\lambda) = \frac{2e^{-\lambda}\lambda^{\lambda}}{(\lambda-1)!}$$

[5]　以下の問に答えよ．

(1) 複素関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ の上半平面 $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ における極をすべて求め，そこでの留数を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$ が収束することを示し，その値を求めよ．

[6]　a を整数ではない実数とする．以下の問に答えよ．

(1) 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義される関数

$$f(x) = \cos\, ax \quad (-\pi \le x \le \pi)$$

のフーリエ級数展開を求めよ．

(2) 次の等式を示せ．

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} = \frac{\pi}{a \sin\, a\pi}$$

[7]　以下の問に答えよ．

(1) $f(t) = \sin^2 t$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めよ．

(2) 次の関数 $G(s)$ のラプラス逆変換 $g(t)$ を求めよ．

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$