

九州大学大学院数理学府  
平成 23 年度修士課程入学試験  
数学基礎科目問題 (数理学コース数学型)

- 注意 • 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答せよ .  
• 以下  $\mathbb{N}$  は自然数の全体 ,  $\mathbb{R}$  は実数の全体を表す .

[1] 実 2 変数関数  $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2$  を考える .  $f$  の偏導関数を  $f_x, f_y$  で表す . 以下の問に答えよ .

- (1)  $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$  を満たす点  $(x, y)$  をすべて求めよ .
- (2)  $\mathbb{R}^3$  内の曲面  $z = f(x, y)$  の , 平面  $y = 0$  による切口  $C$  , 及び平面  $y = x$  による切口  $D$  の概形を描け .
- (3) 関数  $f(x, y)$  の極値をすべて求めよ .

[2] 以下の広義積分  $A, B, C$  を考える .

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} \cos(x^2) \cos(y^2) dx dy,$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} \sin(x^2) \cos(y^2) dx dy,$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} \sin(x^2) \sin(y^2) dx dy.$$

以下の問に答えよ .

- (1) 広義積分  $A, B, C$  が収束することを示せ .
- (2)  $A - C$  を求めよ .
- (3)  $2B$  を求めよ .
- (4)  $A, C$  を求めよ .

[3] 実行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  を考える．ただし  $a \neq c$  または  $b \neq 0$  とする．このとき  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  に対して  $f(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = ax^2 + 2bxy + cy^2$  とおく． $A$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2$  とするとき，以下の問に答えよ．

- (1)  $\lambda_1, \lambda_2$  は相異なる実数であることを示せ．
- (2)  $\lambda_1, \lambda_2$  に対応する固有ベクトルを  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  とするとき， $\mathbf{u}_1$  と  $\mathbf{u}_2$  は  $\mathbb{R}^2$  の標準内積に関して直交することを示せ．
- (3)  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  を，(2) の固有ベクトルを  $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = 1$  となるように正規化したものとする． $\mathbf{x} = \xi\mathbf{u}_1 + \eta\mathbf{u}_2$  とするとき  $f(\mathbf{x})$  を  $\xi, \eta$  で表せ．
- (4)  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$  の場合に (3) で正規化した  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  に対し  $\mathbf{x} = \frac{\xi'}{\sqrt{|\lambda_1|}}\mathbf{u}_1 + \frac{\eta'}{\sqrt{|\lambda_2|}}\mathbf{u}_2$  とするとき， $f(\mathbf{x})$  を  $\xi', \eta'$  で表せ．

[4]  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  を有界な実数列とし，各自然数  $n$  に対して

$$A_n = \{a_m \in \mathbb{R} \mid m \geq n\}, \quad s_n = \sup A_n$$

とおく．以下の問に答えよ．

- (1)  $\{s_n\}_{n \geq 1}$  は (広義) 単調減少列となり，その極限が存在すること，すなわち

$$\text{各自然数 } n \text{ に対して } s_n \geq s_{n+1}, \quad \text{および} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{ が存在する}$$

ことを示せ．以下ではこの極限を  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  と書く．

- (2)  $X = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{無限個の } m \text{ に対して } a_m > x\}$  とおく．このとき

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup X$$

となることを示せ．

- (3) 有界な実数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}, \{b_n\}_{n \geq 1}$  に対して，

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

となることを示せ．

- (4) (3) の不等式において等号は一般には成立しない．反例を具体的に挙げよ．

[5]  $n \in \mathbb{N}$  に対し  $n$  次以下の  $x$  の実係数多項式の全体を  $V_n$  とする.  $V_n$  の元  $f, g$  と実数  $c$  に対して,  $f$  と  $g$  の「和」および  $c$  による「スカラー倍」を

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = cf(x)$$

によって定義して,  $V_n$  を実線形空間とみなす. また,  $V_n$  の元のうち,  $x = \pm 1$  でゼロになるものの全体を  $W_n$  とする:

$$W_n = \{f \in V_n \mid f(-1) = f(1) = 0\}$$

以下の問に答えよ.

- (1)  $V_n$  の基底を一組与えよ.
- (2)  $W_n$  は  $V_n$  の線形部分空間となることを示せ.
- (3)  $W_n$  の基底を一組与えよ. また,  $W_n$  の次元を求めよ.
- (4)  $f, g \in V_n$  に対して

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

と定義するとき,  $(\cdot, \cdot)$  は  $V_n$  の内積となることを示せ.

- (5)  $V_3$  の上の内積に関する直交基底を一組与えよ.