九州大学大学院数理学府
平成23年度修士課程入学試験
数学基礎科目問題 (数理学コース数理科学型)

注意 ● 問題 [1][2][3][4][5] のすべてに解答せよ.
● 以下 $\mathbb{R}$ は実数の全体を表す.

[1] 実2変数関数 $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2$ を考える． f の偏導関数を f_x, f_y で表す．以下の問に答えよ.

(1) $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $z = f(x,y)$ の，平面 $y = 0$ による切口 C，及び平面 $y = x$ による切口 D の概形を描け.

(3) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

[2] 以下の広義積分 A, B, C を考える.

$$A = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} \cos(x^2)\cos(y^2)\,dxdy,$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} \sin(x^2)\cos(y^2)\,dxdy,$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} \sin(x^2)\sin(y^2)\,dxdy.$$

以下の問に答えよ.

(1) 広義積分 A, B, C が収束することを示せ.

(2) $A - C$ を求めよ.

(3) $2B$ を求めよ.

(4) A, C を求めよ.

[3]　実行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ を考える．ただし $a \neq c$ または $b \neq 0$ とする．このとき $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = ax^2 + 2bxy + cy^2$ とおく．A の固有値を λ_1, λ_2 とするとき，以下の問に答えよ.

(1) λ_1, λ_2 は相異なる実数であることを示せ.

(2) λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルを $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ とするとき，$\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の標準内積に関して直交することを示せ.

(3) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ を，(2) の固有ベクトルを $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = 1$ となるように正規化したものとする．$\mathbf{x} = \xi\mathbf{u}_1 + \eta\mathbf{u}_2$ とするとき $f(\mathbf{x})$ を ξ, η で表せ.

(4) $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ の場合に (3) で正規化した $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ に対し $\mathbf{x} = \dfrac{\xi'}{\sqrt{|\lambda_1|}}\mathbf{u}_1 + \dfrac{\eta'}{\sqrt{|\lambda_2|}}\mathbf{u}_2$ とするとき，$f(\mathbf{x})$ を ξ', η' で表せ.

[4]　2 つの 2 次正方行列 A, B を次のようにおく.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

以下の問に答えよ.

(1) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ が $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ の範囲で動くとき，次の値 $f(\mathbf{x})$ の取りうる範囲を求めよ.

$$f(\mathbf{x}) = \frac{{}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$$

(2) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ が $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ の範囲で動くとき，次の値 $g(\mathbf{x})$ の取りうる範囲を求めよ.

$$g(\mathbf{x}) = \frac{{}^t\mathbf{x}B\mathbf{x}}{{}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}}$$

[5]　区間 $I=(a,b)\ (a<b)$ において関数 $f(x)$ は2回連続微分可能で $f''(x)>0$ であるとする．以下の問に答えよ．

(1) 区間 I に含まれる数 $x,\ c$ に対して

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c)$$

が成り立つことを示せ．

(2) I に含まれる任意の $x_k\ (k=1,2,\ldots,n)$ に対して，不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

が成り立つことを示せ．また，ここで等号が成り立つための必要十分条件を求めよ．

(3) 区間 $[\alpha,\beta]\,(\alpha<\beta)$ 上で定義された連続関数 $g(t)$ の値域が I に含まれているとき，不等式

$$f\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta g(t)\,dt\right) \leq \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(g(t))\,dt$$

が成り立つことを示せ．